7. Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen

7.1 Gleichungen

7.1.1 Begriff der Gleichung

Definition:

Zwei Terme[1], zwischen denen ein Gleichheitszeichen (=) steht, bilden eine *Gleichung*.

Wegen ihrer Stellung zum Gleichheitszeichen bezeichnet man die Terme als linker bzw. rechter Term oder als linke bzw. rechte Seite der Gleichung.

Man unterscheidet Gleichungen, in denen keine Variablen vorkommen und solche, in denen Variable auftreten.
Gleichungen ohne Variable stellen Aussagen (Gleichheitsaussagen) dar, die entweder wahr oder falsch sind.

Beispiele:

a)	$11 + 4 = 15$	wahre Aussage
b)	$28 - 7 = 12 + 6$	falsche Aussage
c)	$4 \cdot 13 - 2 = 15 \cdot 2 + 20$	wahre Aussage

Gleichungen mit Variablen sind Aussageformen. Sie gehen durch Einsetzungen für die Variablen in wahre oder falsche Aussagen über.
Die Variablen sind so zu *bestimmen*, daß wahre Gleichheitsaussagen entstehen. Man nennt diese Gleichungen deshalb *Bestimmungsgleichungen*.
In diesem Kapitel wollen wir nur solche Gleichungen betrachten, in denen *eine* Variable vorkommt.

Beispiel: $x + 5 = 2$

Hier ist für die Variable x eine Zahl einzusetzen, so daß die Gleichung erfüllt wird, d. h. obige Aussageform ist durch eine geeignete Einsetzung in eine wahre Aussage zu überführen.
Dabei ist es offensichtlich erforderlich, anzugeben, welcher Zahlbereich der Gleichung (Aussageform) zugrundegelegt wird.
Diese Zahlenmenge, aus der die Zahlen zum Einsetzen für die Variable x ausgewählt werden, heißt Grundmenge $\mathbb{G}$.
Nehmen wir bezüglich der obigen Aufgabe für die Grundmenge $\mathbb{G}$ die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, so hat die Aufgabe in $\mathbb{N}$ keine Lösung, da es keine natürliche Zahl gibt, die für x eingesetzt die Gleichung erfüllt. Die Lösungsmenge ist somit leer: $\mathbb{L} = \{\ \}$.
Betrachten wir die Gleichung $x + 5 = 2$ auf der Grundmenge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, so finden wir $x = -3$ als Lösung: $\mathbb{L} = \{-3\}$.
Es gibt auch Gleichungen, die von *jedem* Element der Grundmenge $\mathbb{G}$ erfüllt werden.

1) Zahlen, Variable und sinnvolle Zusammenstellungen aus Zahlen und Variablen mit Hilfe von Rechenzeichen heißen *Terme*. terminus (lat.) Ausdruck

Beispiele:

a) $3x + 1 = 3x + 1$ **b)** $12 + x - 7 = 2x + 5 - x$

Nehmen wir als Grundmenge $\mathbb{G}$ die Menge der rationalen Zahlen, so ist diese auch Lösungsmenge, da durch jede beliebige rationale Zahl, die für x in die obigen Gleichungen (Aussageformen) eingesetzt wird, eine wahre Aussage entsteht ($\mathbb{L} = \mathbb{Q}$).

Allgemein erklärt man den Begriff *Lösungsmenge* einer Gleichung (mit einer Variablen) wie folgt:

Definition:

Unter der *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ einer Gleichung (Aussageform) versteht man die Menge aller Elemente der Grundmenge $\mathbb{G}$, die beim Einsetzen für die Variable die Gleichung (Aussageform) in eine wahre Aussage überführen.

Die Elemente der Lösungsmenge nennt man die *Lösungen* der Gleichung.

Aufgaben

Setze in den folgenden Gleichungen (Aussageformen) jeweils für die Variable x die Zahlen aus der angegebenen Grundmenge ein und untersuche, ob sich wahre oder falsche Aussagen ergeben.

1.	$x + 4 = 15$	$\mathbb{G} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$
2.	$4x - 3 = 16$	$\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3.	$5x + 3 = 6$	$\mathbb{G} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\}$
4.	$x - 2 = x + 1$	$\mathbb{G} = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
5.	$x + 2 = (3x + 2) - 2x$	$\mathbb{G} = \{-3, -2, \ldots, 5\}$

7.1.2 Das Lösen von Gleichungen (Lösungsverfahren)

Eine Gleichung *lösen* heißt, ihre Lösungsmenge bestimmen.
Bei den bisher betrachteten Gleichungen war es verhältnismäßig leicht, die Lösungsmenge zu ermitteln. Da dies nicht immer so leicht möglich ist, benötigt man ein *allgemeines Verfahren* zur Lösung von Gleichungen. Dazu brauchen wir zunächst den Begriff der *Gleichwertigkeit* oder *Äquivalenz* von Gleichungen.

Definition:

Gleichungen heißen *gleichwertig* oder *äquivalent*, wenn sie bezüglich der gleichen Grundmenge die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Das *Lösungsverfahren* besteht nun darin, aus der gegebenen Gleichung (deren Lösungsmenge zu bestimmen ist) durch *Umformungen* in einzelnen Schritten gleichwertige (äquivalente), aber einfachere, überschaubarere Gleichungen herzuleiten, aus deren Endgleichung die Lösung unmittelbar zu ersehen ist.
Solche Umformungen, die eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung überführen, sind:

(1) Vertauschen der beiden Seiten
(2) Addieren derselben Zahl bzw. desselben Terms auf beiden Seiten
(3) Subtrahieren derselben Zahl bzw. desselben Terms auf beiden Seiten
(4) Multiplizieren mit derselben Zahl bzw. demselben Term ($\neq 0$) auf beiden Seiten
(5) Dividieren durch dieselbe Zahl bzw. denselben Term ($\neq 0$) auf beiden Seiten

Allgemein gilt:

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten (der Gleichung) die gleichen Rechenoperationen durchführt.

Um die Richtigkeit der ermittelten Lösungsmenge einer Gleichung nachzuprüfen, muß man den gefundenen Lösungswert bzw. die gefundenen Lösungswerte in die ursprünglich gegebene Gleichung (Ausgangsgleichung) für die Variable einsetzen und prüfen, ob sich eine wahre Aussage ergibt. Diese Lösungskontrolle nennt man Probe.

Beispiele:

a) $6x = 5x + 12 \qquad (\mathbb{G} = \mathbb{Q})$

Lösungsschritt: Subtraktion des Terms $5x$

$$6x - 5x = 5x - 5x + 12$$
$$x = 0 + 12$$
$$x = 12$$
$$\mathbb{L} = \{12\}$$

Lösungskontrolle (Probe):

$$6 \cdot 12 = 5 \cdot 12 + 12$$
$$72 = 60 + 12$$
$$72 = 72 \qquad \text{wahre Aussage}$$

b) $2x + 24 = 36 - x + 4 + 3x \qquad (\mathbb{G} = \mathbb{Q})$

1. Lösungsschritt: Zusammenfassen geeigneter Glieder

$$2x + 24 = 40 + 2x$$

2. Lösungsschritt: Subtraktion des Terms $2x$

$$2x - 2x + 24 = 40 + 2x - 2x$$
$$0 + 24 = 40 + 0$$
$$24 = 40 \qquad \text{falsche Aussage.}$$

Da die äquivalente Umformung dieser Gleichung zu einer falschen Aussage führt, hat die Gleichung keine Lösung. Keine rationale Zahl überführt – für x in die obige Gleichung eingesetzt – die Gleichung in eine wahre Aussage.
Man darf eine solche Gleichung aber nicht als falsch oder unmöglich bezeichnen, denn bei jeder Gleichung mit Variablen lautet ja die Frage, ob es eine Zahl (bzw. Zahlen) gibt, deren Einsetzung(en) für die Variable(n) die Gleichung in eine wahre Aussage überführt.

c) $4 \cdot (3x - 8) - 6 \cdot (5 + 4x) = 2 \cdot (3x - 13) \qquad (\mathbb{G} = \mathbb{Q})$

1. Schritt: Auflösen der Klammern

$$12x - 32 - 30 - 24x = 6x - 26$$

2. Schritt: Zusammenfassen geeigneter Glieder

$$-12x - 62 = 6x - 26$$

3. Schritt: Subtraktion des Terms $6x$

$$-12x - 6x - 62 = 6x - 6x - 26$$
$$-18x - 62 = -26$$

4. Schritt: Addition der Zahl 62

$$-18x - 62 + 62 = -26 + 62$$
$$-18x = 36$$

5. Schritt: Division durch die Zahl (-18)

$$\frac{-18x}{-18} = \frac{36}{-18}$$
$$x = -2$$
$$\mathbb{L} = \{-2\}$$

Probe:

$$4 \cdot [3 \cdot (-2) - 8] - 6 \cdot [5 + 4 \cdot (-2)] = 2 \cdot [3 \cdot (-2) - 13]$$
$$4 \cdot [-14] - 6 \cdot [-3] = 2 \cdot [-19]$$
$$-56 - (-18) = -38$$
$$-56 + 18 = -38$$
$$-38 = -38 \qquad \text{wahre Aussage}$$

Bemerkung:

Bei genügender Übung und ausreichender Sicherheit in der Anwendung der Umformungsregeln beim Lösen von Gleichungen kann man kleinere Lösungsschritte zu einem größeren Lösungsschritt zusammenfassen.

d) In dem folgenden Beispiel bedeuten a und b beliebige, aber fest gewählte Zahlen aus $\mathbb{Q}$. Man bezeichnet a und b als Formvariable.

$$a(x - a) = b(x - b); \qquad (a, b, \in \mathbb{Q}, \quad a \neq b), \quad (\mathbb{G} = \mathbb{Q})$$

1. Schritt: Ausmultiplizieren

$$ax - a^2 = bx - b^2$$

2. Schritt: Ordnen

$$ax - bx = a^2 - b^2$$

3. Schritt: x im linken Term ausklammern

$$x(a - b) = a^2 - b^2$$

4. Schritt: Division durch $(a - b)$, $(a - b) \neq 0$

$$\frac{x(a-b)}{a-b} = \frac{a^2 - b^2}{a-b} \qquad \Big| \qquad a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$
$$x = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}$$
$$x = a + b$$
$$\mathbb{L} = \{a + b\}$$

Probe: $a(a + b - a) = b(a + b - b)$

$$ab = ba \qquad \text{wahre Aussage}$$

Hier ist aber 3 kein Element aus der Definitionsmenge $\mathbb{D}$, denn die Zahl $x = 3$ mußte ja gerade ausgeschlossen werden. Somit hat die obige Gleichung keine Lösung: $\mathbb{L} = \{\ \}$.
Die Gleichung $x - 3 + 6 = 2x - 6 + 2x$ dagegen hat die Lösung $x = 3$ ($\mathbb{L} = \{3\}$).
Beim Übergang von $1 + \frac{6}{x-3} = 2 + \frac{2x}{x-3}$ zu $x - 3 + 6 = 2x - 6 + 2x$ hat sich die Lösungsmenge vergrößert, da diese Gleichung ohne Ausnahme auf der Menge $\mathbb{Q}$ erklärt ist.

Beachte:

Tritt bei einer Bruchgleichung die Variable x im Nenner auf, so ist stets die Lösungskontrolle durchzuführen.

h) $\frac{18}{x+1} - \frac{7}{x-1} = \frac{11}{x+3} \qquad (\mathbb{G} = \mathbb{Q})$

$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{(-1), (+1), (-3)\}$

Da der Nenner Null ausgeschlossen werden muß, ist die Gleichung für $x = -1$, $x = +1$ und $x = -3$ nicht definiert.
Multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner HN $= (x + 1)(x - 1)(x + 3)$, so werden die Brüche beseitigt.

$$\begin{aligned}
(x+1)(x-1)(x+3)\cdot\frac{18}{x+1} - (x+1)(x-1)(x+3)\cdot\frac{7}{x-1} &= (x+1)(x-1)(x+3)\cdot\frac{11}{x+3}\\
(x-1)(x+3)\cdot 18 - (x+1)(x+3)\cdot 7 &= (x+1)(x-1)\cdot 11\\
(x^2 - x + 3x - 3)\cdot 18 - (x^2 + x + 3x + 3)\cdot 7 &= (x^2 + x - x - 1)\cdot 11\\
(x^2 + 2x - 3)\cdot 18 - (x^2 + 4x + 3)\cdot 7 &= (x^2 - 1)\cdot 11\\
18x^2 + 36x - 54 - 7x^2 - 28x - 21 &= 11x^2 - 11\\
11x^2 + 8x - 75 &= 11x^2 - 11\\
8x - 75 &= -11\\
8x &= 64\\
x &= 8\\
\underline{\underline{\mathbb{L}}} &\underline{\underline{= \{8\}}}
\end{aligned}$$

Probe: $\frac{18}{8+1} - \frac{7}{8-1} = \frac{11}{8+3}$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$ wahre Aussage