Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus
Berufsmaturität

Berufsmaturitätsprüfung — Mathematik 2016

BM-Ausrichtung Wirtschaft und Dienstleistungen, Typ Wirtschaft — **Serie 1**

Prüfungsbedingungen

- Erlaubte Hilfsmittel: netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner (keine CAS-Rechner) sowie die Formelsammlung des Lehrmittel „Mathematik in der Wirtschaftsschule“, whv-Verlag, keine Mobiles.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und dargestellt sein. Gefordert ist auch eine klare Beschriftung aller Grafiken.
- Die Resultate müssen eindeutig markiert und dargestellt werden. Textaufgaben verlangen einen Lösungssatz.
- Doppellösungen und unbelegte Resultate werden nicht bewertet.
- Ungültige Lösungen und Lösungsansätze müssen durchgestrichen werden.
- Alle Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Lösungsbereichen innerhalb dieses Dossiers zu lösen. Allfällig verwendete Zusatzblätter werden nicht bewertet.

Prüfungsdatum: Dienstag, 7. Juni 2016, 08.00-10.00 Uhr(120 Minuten)

Lösungen

Aufgabe	Maximale Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1	3	
2	3	
3	5	
4	9	
5	6	
6	6	
7	6	
8	14	
9	9	
10	12	
11	12	
12	8	
13	7	
Total	**100**	
NOTE		

Sperrfrist:
Diese Prüfungsaufgaben dürfen nicht vor dem **1. September 2017** zu Übungszwecken verwendet werden.

Experte 1: ....

Experte 2: ....

Lösungen

Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus
Berufsmaturität

Aufgabe 1	Grundlagen	3 Punkte

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\left(a-3b\right)^2-\left(b-2a\right)^2$$

Punkte	Kriterium
2	Binomische Terme korrekt aufgelöst
1	Lösung

Lösung:

$$\left(a-3b\right)^2-\left(b-2a\right)^2$$

$$a^2-6ab+9b^2-b^2+4ab-4a^2$$

$$\underline{\underline{-3a^2-2ab+8b^2}}$$

Aufgabe 2	Grundlagen	3 Punkte

Fassen Sie die Bruchterme so weit wie möglich zusammen.

$$\frac{-a}{(a+b)^2}-\frac{b}{a^2-b^2}$$

Punkte	Kriterium
1	Hauptnenner bestimmen
1	Brüche korrekt erweitert
1	Lösung

Lösung:

$$\frac{-a}{(a+b)^2}-\frac{b}{a^2-b^2}$$

$$\frac{-a}{(a+b)^2}-\frac{b}{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}$$

$$\frac{-a\left(a-b\right)-b\left(a+b\right)}{(a+b)^2\left(a-b\right)}$$

$$\frac{-a^2+ab-ab-b^2}{(a+b)^2\left(a-b\right)}=\underline{\underline{\frac{-a^2-b^2}{(a+b)^2\left(a-b\right)}}}$$

Aufgabe 3 Lineare Gleichungen 5 Punkte

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{Q}$

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
1	Lösungsmenge
	Pro Fehler 2 Punkte Abzug

$$\frac{x+6}{x-6}-\frac{x+20}{x+4}=0$$

Lösung:

$$\frac{x+6}{x-6}-\frac{x+20}{x+4}=0 \quad \left|\cdot(x-6)\cdot(x+4)\right. \qquad D=\mathbb{Q}\setminus\{-4;6\}$$

$$(x+6)(x+4)-(x+20)(x-6)=0$$

$$x^2+10x+24-x^2-14x+120=0$$

$$144=4x$$

$$36=x$$

$$\underline{\underline{L=\{36\}}}$$

Aufgabe 4 Gleichungssysteme 9 Punkte

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in der Grundmenge $\mathbb{Q}x\mathbb{Q}$.

$$(1) \quad \frac{10}{x+3}+\frac{20}{y+5}=-7$$

$$(2) \quad \frac{4}{2x+6}+\frac{40}{y+5}=-5$$

Lösung:

$$(1) \quad \frac{10}{x+3}+\frac{20}{y+5}=-7 \quad \left|(-2)\right. \qquad D_x=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$$

$$(2) \quad \frac{4}{2x+6}+\frac{40}{y+5}=-5 \qquad D_y=\mathbb{Q}\setminus\{-5\}$$

$$(1)' \quad \frac{-20}{x+3}-\frac{40}{y+5}=14$$

Addition :

$$\frac{4}{2x+6}-\frac{20}{x+3}=9 \quad \bigg|\cdot 2(x+3)$$

$$4-40=18x+54$$

$$-90=18x$$

$$-5=x$$

einsetzen :

$$\frac{10}{-5+3}+\frac{20}{y+5}=-7 \quad \bigg|+5$$

$$\frac{20}{y+5}=-2 \quad \bigg|\cdot(y+5)$$

$$20=-2y-10$$

$$-15=y$$

$$\underline{\underline{L=\{(-5/-15)\}}}$$

Punkte	Kriterium
2	Definitionsmenge
2	1. Variable bestimmen
2	Additionsverfahren
2	2. Variable bestimmen
1	Lösungsmenge

Aufgabe 5	Textaufgaben	6 Punkte

Zwei Kapitalien ergeben in einem Jahr den gleichen Zinsertrag. Der Zinssatz des kleineren Kapitals beträgt 0.5%, der des grösseren Kapitals 1.2%. Würden beide Kapitalien zu 0.9% verzinst, ergäbe das kleinere Kapital in 8 Monaten CHF 330.75 weniger Zinsertrag als das grössere Kapital in 11 Monaten.
Geben Sie die Definitionen und die Definitionsmenge an und stellen Sie die Gleichungen für das Bestimmen der ursprünglichen Kapitalien auf.
Das Gleichungssystem muss **nicht** vereinfacht und **nicht** aufgelöst werden!

Lösung:
Kleineres Kapital in CHF: x
Grösseres Kapital in CHF: y

$$D=\mathbb{Q}^{+}x\mathbb{Q}^{+}$$

$$(1) \quad \frac{x\cdot 0.5}{100}=\frac{y\cdot 1.2}{100}$$

$$(2) \quad \frac{x\cdot 0.9\cdot 8}{100\cdot 12}+330.75=\frac{y\cdot 0.9\cdot 11}{100\cdot 12}$$

Punkte	Kriterium
2	Definitionen: „kleineres“ und „grösseres“ muss stehen, Einheit „CHF“ muss angegeben sein. Definitionsmenge
2	1. Gleichung
2	2. Gleichung
	Keine Teilpunkte

Lösungen

Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus
Berufsmaturität

Aufgabe 6 — Potenzen und Wurzeln — 6 Punkte

Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich.

$$\frac{a^{x+3}}{a^{-1}\cdot b^{2}}\cdot\left(\frac{a^{-6}\cdot b^{x+2}}{a^{3x-5}}:\frac{b^{4+2x}}{a^{3}}\right)^{-2}$$

Lösung:

$$\frac{a^{x+3}}{a^{-1}\cdot b^{2}}\cdot\left(\frac{a^{-6}\cdot b^{x+2}}{a^{3x-5}}:\frac{b^{4+2x}}{a^{3}}\right)^{-2}=$$

$$\frac{a^{x+3}}{a^{-1}\cdot b^{2}}\cdot\left(\frac{a^{12}\cdot b^{-2x-4}}{a^{-6x+10}}:\frac{b^{-8-4x}}{a^{-6}}\right)=$$

$$\frac{a^{x+3}\cdot a^{12}\cdot b^{-2x-4}\cdot a^{-6}}{a^{-1}\cdot b^{2}\cdot a^{-6x+10}\cdot b^{-8-4x}}=$$

$$a^{x+3+12-6-(-1)-(-6x+10)}\cdot b^{-2x-4-2-(-8-4x)}$$

$$\underline{\underline{a^{7x}\cdot b^{2x+2}}}$$

Punkte	Kriterium
1	Exponent -2 mit den Bruchtermen in der Klammer korrekt verrechnet
1	Division des dritten Bruchterms in eine Multiplikation umgewandelt
2	Potenz mit Basis a korrekt zusammen gefasst
2	Potenz mit Basis b korrekt zusammen gefasst

Aufgabe 7 — 6 Punkte

Bestimmen Sie durch Ankreuzen die richtige Umformung der folgenden Terme und Gleichungen. Nur eine Antwort je Aufgabe ist richtig. G = $\mathbb{R}$

	Term	Lösung	
a)	$2\cdot\log_a\left(a^2\right)-\log_a\left(a^3\right)$	(1) 3	☐
		(2) 1	☒
		(3) a	☐
		(4) a^{-2}	☐
b)	$5\cdot\log_x\left(\sqrt[5]{x^2}\right)+\log_x\left(\frac{1}{x}\right)^5$	(1) -3	☒
		(2) 3	☐
		(3) x^{-3}	☐
		(4) x^3	☐
c)	$\log_x\left(\sqrt[3]{27}\right)=3$	(1) 1	☐
		(2) 1.442	☒
		(3) 0	☐
		(4) 27	☐

Punkte	Kriterium
2	Je richtige Lösung

Lösungen

Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus
Berufsmaturität

Aufgabe 8	Betriebswirtschaftliche Funktionen	14 Punkte

Die Firma Calcufix handelt mit Taschenrechnern. Sie verkauft den Rechner TI-30X Plus MultiView zu CHF 13.25. Die monatlichen Fixkosten betragen CHF 99‘000.-. Bei einer Produktionsmenge von 20‘000 Stück betragen die Gesamtkosten CHF 203‘000.-. Die maximale Produktionsmenge pro Monat liegt bei 25‘000 Stück.

Bestimmen Sie für die Firma Calcufix die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion pro Monat.

x: Menge hergestellter Taschenrechner (TR) pro Monat
y: monatliche Kosten, Erlös, Gewinn in CHF
Lösung:

a) Bestimmen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion. Runden Sie, falls nötig, auf zwei Dezimalstellen.

Kosten: $y = 5.2x + 99'000$

Erlös: $y = 13.25x$

Gewinn: $y = 8.05x - 99'000$

b) Stellen Sie die drei Funktionen im untenstehenden Koordinatensystem bis zur maximalen Produktionsmenge dar.

c) Markieren und beschriften Sie die Nutzschwelle in Stück und den entsprechenden Umsatz in CHF je mit einem farbigen Kreis in der Grafik.

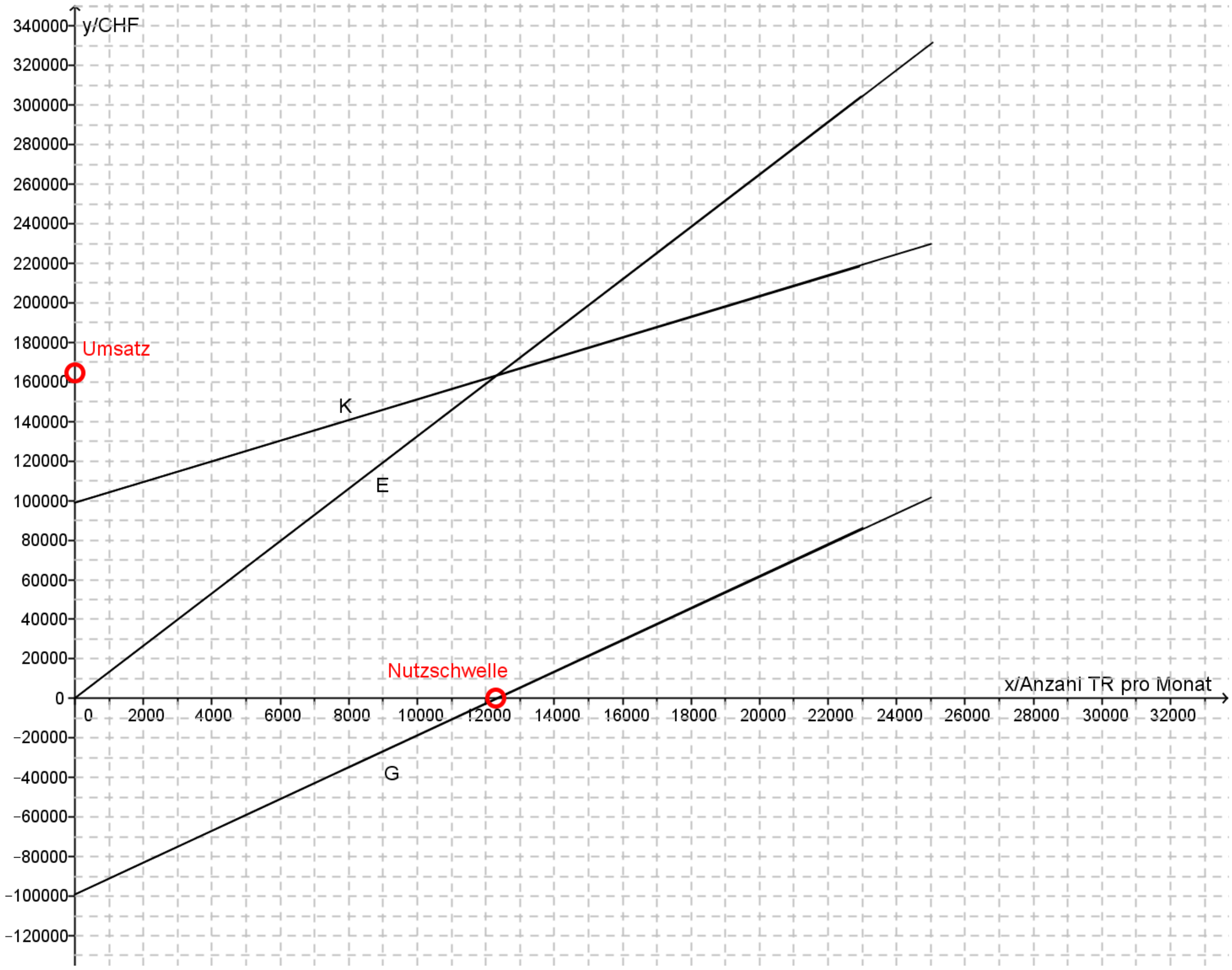
d) Berechnen Sie die minimale Anzahl Taschenrechner, die die Firma Calcufix pro Monat verkaufen muss, um in die Gewinnzone zu kommen.

$$0 = 8.05x - 99000$$
$$x = 12'298.14$$

Die Firma Calcufix muss mindestens 12‘299 Taschenrechner verkaufen, um in die Gewinnzone zu gelangen.

e) Die Unternehmungsleitung setzt sich zum Ziel, die monatlichen Fixkosten um 10 Prozent zu senken. Beurteilen Sie die folgenden Auswirkungen. Kreuzen Sie jeweils in der Tabelle das richtige Feld an.

	Zunahme	Abnahme	gleich
Einfluss auf den Reingewinn	**x**		
Einfluss auf den Break-Even-Point		**x**	
Einfluss auf den Bruttogewinn pro Stück (Deckungsbeitrag pro Stück)			**x**
Einfluss auf die variablen Kosten pro Stück			**x**



Punkte	Kriterium
3	Kosten-, Gewinn-, Erlösfunktion => je 1 Punkt
3	Kosten-, Gewinn-, Erlösfunktion einzeichnen => je 1 Punkt 1 Punkt Abzug für Überschreiten der Kapazitätsgrenze
2	Nutzschwelle und Umsatz einzeichnen => je 1 Punkt
1	Nutzschwelle berechnen
1	Nutzschwelle auf ganze Zahl aufrunden
4	Jedes richtige Kreuz => 1 Punkt

Aufgabe 9	Quadratische Funktion	9 Punkte

Gegeben ist die Parabel k_1 mit der Funktionsgleichung $y = 0.5x^2 – 2x – 1$.

a) Liegt der Punkt $P_1(0.5|–1.875)$ auf dem Graphen von k_1? Begründen Sie.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen und des Scheitelpunkts der Funktion. (Runden Sie auf 2 Dezimalstellen)

c) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Parabel k_1 mit der y-Achse an.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel k_1 mit der Geraden g mit g(x): $y = 2x−2$
(Runden Sie auf 2 Dezimalstellen)

Lösung:
a) $P_1(0.5|–1.875)$ in $k_1(x)$: $y = 0.5x^2 – 2x – 1$ einsetzen:

$–1.875 = 0.5(0.5)^2 – 2(0.5) – 1$
$–1.875 = –1.875$

P_1 liegt auf dem Graphen von k_1.

b) $0 = 0.5x^2 – 2x – 1$

$N_1(-0.45|0)$ $N_2(4.45|0)$ $S(2|-3)$

c) $S_y\ (0|-1)$

d) $0.5x^2 – 2x – 1 = 2x−2$
$0.5x^2 – 4x + 1 = 0$

$S_1(7.74|13.48)$ $S_2(0.26|-1.48)$

Punkte	Kriterium
1	Berechnung bei a)
1	Antwortsatz korrekt bei a)
2	Nullstellen (korrekte Angabe als Punkt mit y-Koordinate 0! => sonst 1 Punkt Abzug)
1	x-Koordinate Scheitelpunkt
1	y-Koordinate Scheitelpunkt
1	Schnittpunkt S_y
2	1 Punkt pro Schnittpunkt (keine Teilpunkte)

Aufgabe 10 Lineare Optimierung 12 Punkte

Die jurassische Uhrenmanufaktur *Montremonde* stellt 2 Arten von Luxusuhren her: *F-One* und *mythe*. Jede Armbanduhr soll 15 g Gold enthalten. *F-One* enthält 12 Diamantsplitter, *mythe* enthält 30 Diamantsplitter.

Die Produktionsabteilung von *Montremonde* hat dafür 210 g Gold und 260 Diamantsplitter zur Verfügung. Die Geschäftsleitung gibt für die Produktion der beiden Luxusuhren eine Fertigungszeit von maximal 48 Stunden vor. Für eine Uhr vom Typ *F-One* benötigt ein Uhrmacher 3 Stunden, für eine Uhr vom Typ *mythe* 2 Stunden Arbeitszeit.

Für eine Uhr vom Typ *F-One* rechnet der Produktionsleiter mit Gesamtkosten von CHF 4‘430. Für die Uhr vom Typ *mythe* rechnet er mit Gesamtkosten von CHF 6‘450.
Die Marketingabteilung von *Montremonde* gibt vor, dass die Produktion des Typs *F-One* mindestens ein Viertel der Gesamtproduktion der beiden Uhren ausmachen soll.
Die beiden Luxusuhren werden an den Verkaufsstandorten in Genf, Zürich und Interlaken zu einem Preis von CHF 8‘200 (F-One) und CHF 9‘700 (mythe) angeboten.

a) Bestimmen Sie die Definitionen.
b) Stellen Sie die Produktionsbedingungen und die Zielfunktion für den maximalen Gewinn auf. Die Bedingungen und die Zielfunktion müssen ***nicht*** nach y aufgelöst, ***nicht*** gezeichnet werden und es ist ***kein*** Planungspolygon zu erstellen.

Lösung

x: *F-One* in Stück
y: *mythe* in Stück
$D = \mathbb{N}_0 x \mathbb{N}_0$

Punkte	Kriterium
1	Definitionen x und y
1	Definitionsmenge
8	Ungleichungen aufstellen
2	Zielfunktion aufstellen und nach y auflösen

$D = \mathbb{N}_0 x \mathbb{N}_0$

(1) $15x + 15y \leq 210$ "$\leq$"

(2) $12x + 30y \leq 260$ "$\leq$"

(3) $3x + 2y \leq 48$ "$\leq$"

(4) $x \geq \frac{1}{4}(x + y)$ "$\leq$"

$$z = (8200 - 4430)x + (9700 - 6450)y$$
$$z = 3770x + 3250y$$

Aufgabe 11	Lineare Optimierung	12 Punkte

a) Formen Sie die gegebenen Bedingungen und die Zielfunktion nach y auf. Zeichnen Sie das Planungspolygon in das Diagramm auf der folgenden Seite ein. ($D = \mathbb{Q}^+ x \mathbb{Q}^+$)

b) Zeichnen Sie die Zielfunktion ebenfalls ins Diagramm ein und berechnen Sie die Koordinaten für S_{max} mathematisch.

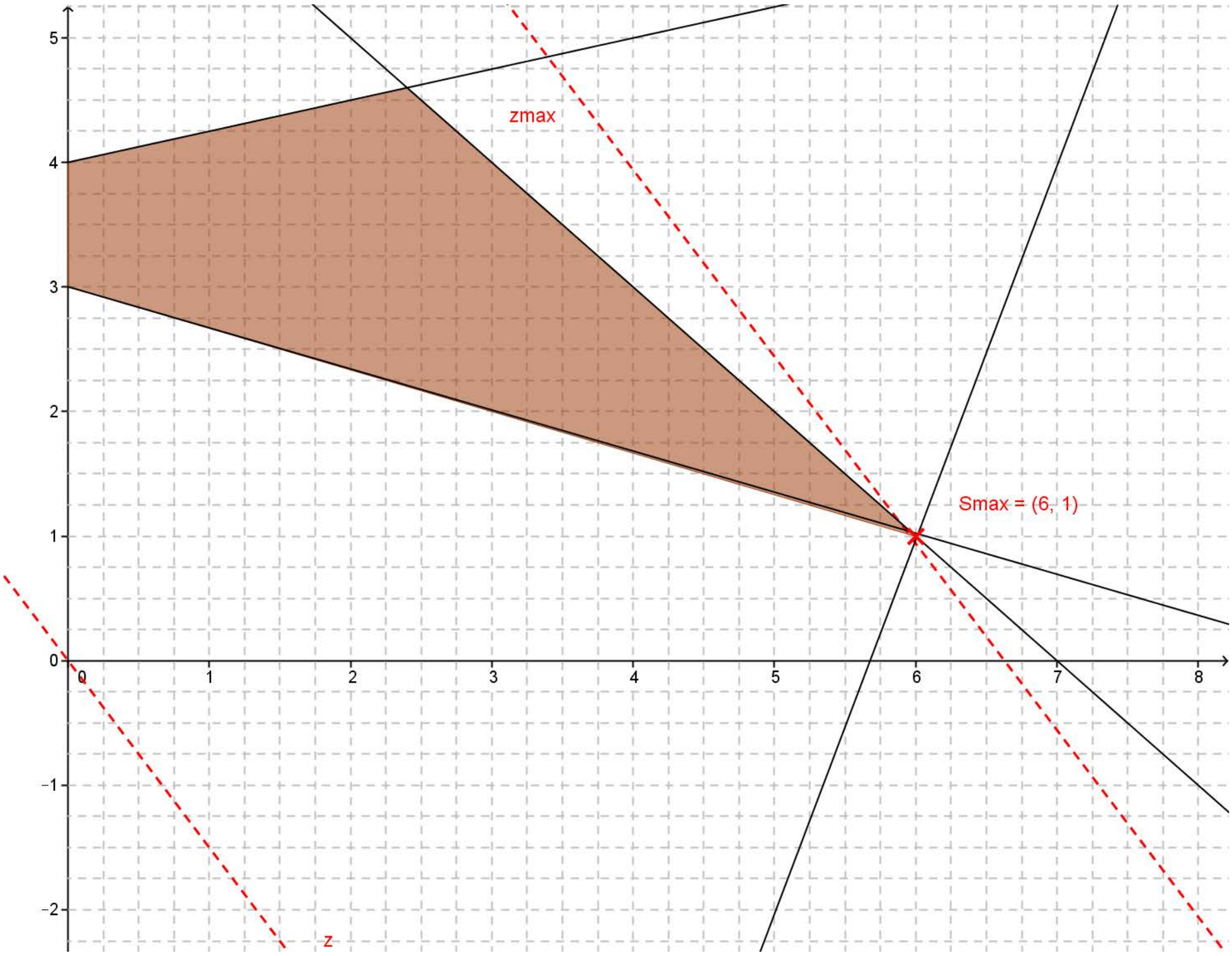
c) Wie gross ist das Maximum gemäss Zielfunktion?

Lösung:

a)

(1)	$7 - y \geq x$	$y = -x + 7$	"$\leq$"
(2)	$-2x + 8y - 32 \leq 0$	$y = 0.25x + 4$	"$\leq$"
(3)	$y \geq 3x - 17$	$y = 3x - 17$	"$\geq$"
(4)	$-x - 3y \leq -9$	$y = -\frac{1}{3}x + 3$	"$\geq$"

$z = 3x + 2y$ $\quad\quad$ $y = -1.5x + \frac{z}{2}$



S_{max}: Schnittpunkt von (1) und (4), (1) und (5), oder (4) und (5)

$-x+7=3x-17$

$24=4x$

$6=x \qquad y=1$

$S_{max}(6/1)$

Punkte	Kriterium
3	Umformen der Geraden 1, 2, 4 und z
4	Einzeichnen der Geraden ins Koordinatensystem
1	Zielfunktion einzeichnen
1	Polygon markieren
2	S_{max} berechnen
1	Maximum gemäss Zielfunktion berechnen

c) Das Maximum gemäss Zielfunktion liegt bei 20.

Aufgabe 12	Datenanalyse	8 Punkte

Für einen Ihrer Aussendienstmitarbeiter analysieren Sie die letzten 20 Arbeitstage bezüglich der Anzahl der Verkaufsabschlüsse. Sie haben die folgenden Zahlen ermittelt:

35, 40, 38, 37, 41, 39, 38, 36, 38, 38, 37, 44, 40, 30, 40, 37, 37, 38, 42, 38

Berechnen Sie den Mittelwert, den Median, das erste und das dritte Quartil. Runden Sie die Resultate auf 2 Dezimalstellen, falls nötig.
Lösung:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
xi	30	35	36	37	37	37	37	38	38	38	38	38	38	39	40	40	40	41	42	44

Mittelwert: 38.15
Median: 38
Quartile: Q_1 37 (x_5) Q_3 40 (x_{15})

Punkte	Kriterium
8	Je 2 Punkte für Median, Mittelwert, Q_1 und Q_3 (keine Teilpunkte)

Aufgabe 13	Finanzmathematik	7 Punkte

Ein Kredit von CHF 40‘000.00 muss über einen bestimmten Zeitraum verzinst werden und steigt mit den Schuldzinsen auf CHF 56‘970.10. Der Zinssatz steigt nach drei Jahren von 3.25% auf 3.75%. Wie lange ist die gesamte Laufzeit dieses Darlehens?

Lösung:

$$40000 \cdot 1.0325^3 \cdot 1.0375^x = 56970.1$$

$1.0375^x = 1.2939$

$$x = \frac{\log 1.2939}{\log 1.0375} = 6.999$$

Die gesamte Laufzeit beträgt 10 Jahre (3 + 7!).

Punkte	Kriterium
3	Gleichung aufstellen
2	Gleichung auflösen mit Logarithmus
2	Korrekter Schlusssatz mit 10 Jahren als Lösung