Kanton St. Gallen
Bildungsdepartement

Berufs- und Weiterbildungszentrum

Berufsmaturitätsprüfung M-Profil Mathematik 2015

Prüfungsbedingungen

- Erlaubte Hilfsmittel: netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner (keine CAS-Rechner)sowie die persönliche Formelsammlung, keine Handys.
- Der **Lösungsweg** muss **klar ersichtlich** und dargestellt sein. Gefordert ist auch eine klare Beschriftung aller Grafiken.
- Die Resultate müssen eindeutig dargestellt werden (**doppelt unterstreichen**). Textaufgaben verlangen einen **Schlusssatz**.
- Doppellösungen und unbelegte Resultate werden **nicht** bewertet.
- Ungültige Lösungen und Lösungsansätze müssen durchgestrichen werden.
- Alle Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Lösungsbereichen innerhalb dieses Dossiers zu lösen. Allfällig verwendete Zusatzblätter werden **nicht** bewertet.

Prüfungsdatum: Dienstag, 2. Juni 2015, 08.00-10.00 Uhr (120 Minuten)

Lösungsvorlage

Aufgabe	Maximale Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1	3	
2	4	
3	5	
4	8	
5	9	
6	4	
7	4	
8	10	
9	6	
10	9	
11	12	
12	13	
13	7	
14	6	
Total	**100**	
	NOTE	

Sperrfrist:
Diese Prüfungsaufgaben dürfen nicht vor dem **1. September 2016** zu Übungszwecken verwendet werden.

Experte 1: ....

Experte 2: ....

Aufgabe 1 Grundlagen 3 Punkte

Fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen.

$$10a^2 - \left(-6b^2 + (3a - 4b)^2\right) + 10b^2 =$$

$$10a^2 - \left(-6b^2 + 9a^2 - 24ab + 16b^2\right) + 10b^2 =$$

$$10a^2 - 10b^2 - 9a^2 + 24ab + 10b^2 =$$

$$\underline{\underline{a^2 + 24ab}}$$

Punkte	Kriterium
2	1 Fehler
1	2 Fehler
0	3 Fehler

Aufgabe 2 Lineare Gleichungen 4 Punkte

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichung in der Grundmenge ¤ .

$$\frac{x-2}{4} - \frac{x+8}{10} = 2 \quad |\cdot 20 \qquad D = ¤$$

$$5x - 10 - 2x - 16 = 40$$

$$3x = 66$$

$$x = 22$$

$$\underline{\underline{L = \{22\}}}$$

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
1 Punkt Abzug	1 Fehler
2 Punkte Abzug	2 Fehler
1	Lösungsmenge

Aufgabe 3 Lineare Gleichungen 5 Punkte

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge für die Variable x der folgenden linearen Gleichung mit Parametern in der Grundmenge ¤ .

$$\frac{a-b}{x} + b = a - \frac{a-b}{x} \quad |\cdot x \qquad D = ¤ \setminus \{0\}$$

$$a - b + bx = ax - a + b \quad | - bx; + a - b$$

$$2a - 2b = x(a - b)$$

$$2(a - b) = x(a - b)$$

$$2 = x$$

$$\underline{\underline{L = \{2\}}}$$

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
1	Mit Hauptnenner x multiplizie-ren
2	x ausklammern und dann be-rechnen
1	Lösungsmenge

Aufgabe 4 Lineare Gleichungssysteme 8 Punkte

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge des nachfolgenden Gleichungssystems in der Grundmenge ¤ x¤ . Probe ist nicht erforderlich.

Punkte	Kriterium
2	Definitionsmenge
3	erste Variable berechnen
2	zweite Variable berechnen
1	Lösungsmenge; korrekte Darstellung als Lösungspaar in runden Klammern

$$(1)\quad \frac{14}{2x+8}-\frac{1}{3-y}=0 \qquad D_x=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$$

$$(2)\quad \frac{4}{x+4}=\frac{18}{7}-\frac{2}{3-y} \qquad D_y=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

$$(1)\quad \frac{14}{2x+8}-\frac{1}{3-y}=0 \qquad |\cdot 2$$

$$(2)\quad \frac{4}{x+4}+\frac{2}{3-y}=\frac{18}{7}$$

$$(1)\quad \frac{28}{2x+8}-\frac{2}{3-y}=0$$

$$\frac{4}{x+4}+\frac{28}{2x+8}=\frac{18}{7} \qquad |\cdot 14(x+4)$$

$$56+196=36x+144$$

$$108=36x$$

$$3=x$$

$$\frac{14}{2\cdot 3+8}-\frac{1}{3-y}=0$$

$$1=\frac{1}{3-y}$$

$$3-y=1$$

$$y=2$$

$$\underline{\underline{L=\{(3/2)\}}}$$

Aufgabe 5 Textaufgaben 9 Punkte

Das 5-fache einer natürlichen Zahl, vergrössert um die Hälfte dieser Zahl ist um 58 grösser als die Differenz aus dem Produkt der Zahl mit 15 und dem Quotienten von 3360 mit der Zahl. Wie heisst die Zahl?

Gesuchte Zahl: x

$$5x + \frac{x}{2} - 58 = 15x - \frac{3360}{x} \quad |\cdot x$$

$$5x^2 + 0.5x^2 - 58x = 15x^2 - 3360$$

$$-9.5x^2 - 58x + 3360 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-58) \pm \sqrt{(-58)^2 - 4 \cdot (-9.5) \cdot 3360}}{2(-9.5)}$$

$$x_1 = \frac{58 + 362}{-19} = -22.11$$

$$x_2 = \frac{58 - 362}{-19} = 16$$

x_1 Ï ¥ ! => Die gesuchte natürliche Zahl heisst 16.

Punkte	Kriterium
4	Gleichung aufstellen
2	Vereinfachen der Gleichung auf Normalform quadratische Gleichung
2	Quadratische Gleichung zu den zwei Lösungen auflösen
1	Schlusssatz mit einer Lösung

Aufgabe 6 Potenzen 4 Punkte

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\left(35 \cdot \sqrt{x^4} \cdot y^3\right)^3 : \left(\frac{18a^3b^3}{7x^2\sqrt[4]{y^{12}}}\right)^{-3} =$$

$$35^3x^6y^9 : \frac{18^{-3}a^{-9}b^{-9}}{7^{-3}x^{-6}y^{-9}} =$$

$$\frac{35^3 \cdot 7^{-3} \cdot x^{6-6} \cdot y^{9-9}}{18^{-3} \cdot a^{-9} \cdot b^{-9}} =$$

$$\frac{729'000}{a^{-9} \cdot b^{-9}} = 729'000 \cdot a^9 \cdot b^9$$

Punkte	Kriterium
2	1 Fehler
1	2 Fehler
0	3 Fehler

Aufgabe 7 Exponentialgleichung 4 Punkte

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge ¡ .

$$4^{2x-10} = 1024 \quad |\log_4 \qquad D = ¡$$

$$2x - 10 = 5$$

$$x = 7.5$$

$$L = \{7.5\}$$

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
2	Auflösen der Gleichung mit log oder Exponentenvergleich
1	Lösungsmenge

Aufgabe 8	Lineare Funktionsgleichungen	10 Punkte

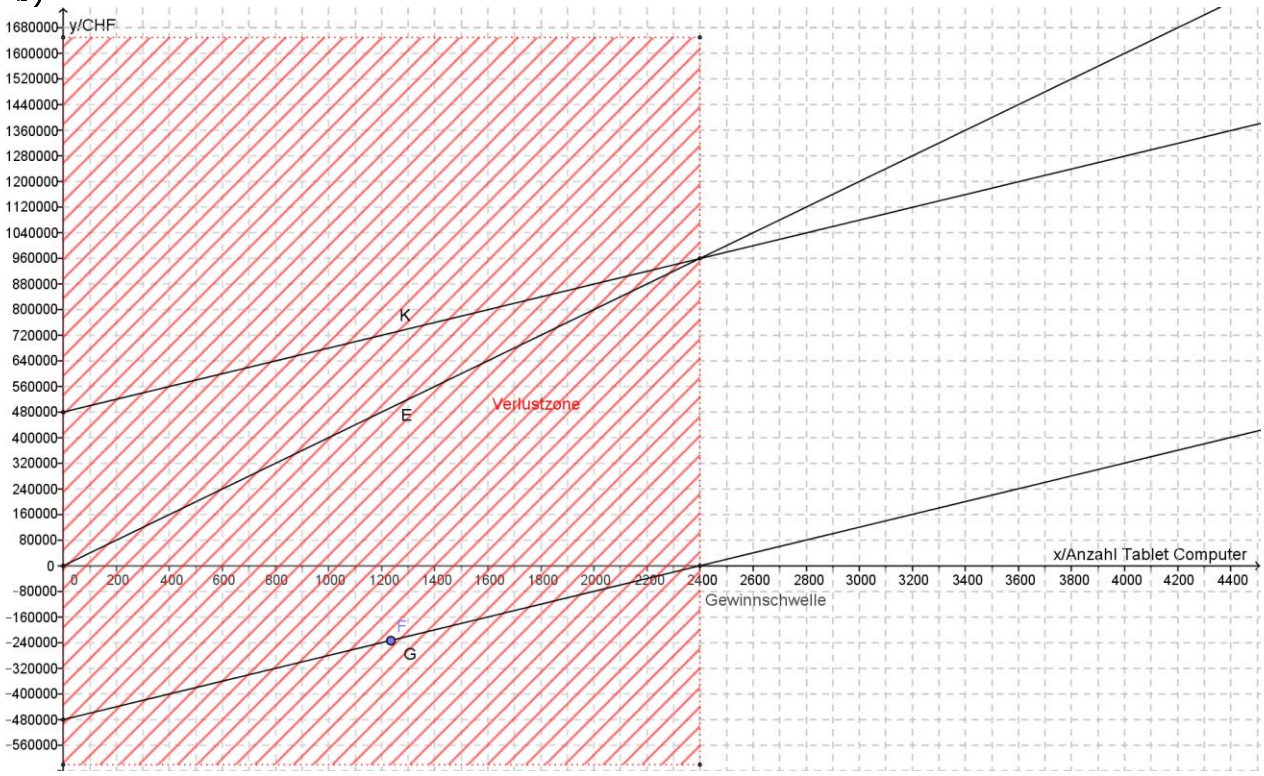
Ein Unternehmen, das Tablet-Computer für den europäischen Markt herstellt, rechnet mit einer Gewinnschwelle von 2‘400 Stück. Werden 300 Tablets verkauft, beträgt der Umsatz CHF 120‘000.-. Die fixen Kosten, die bei der Produktion anfallen, betragen CHF 480‘000.-.

a) Bestimmen Sie: Kostenfunktion, Erlösfunktion, Gewinnfunktion

b) Zeichnen Sie die drei Funktionen in ein **geeignetes** Koordinatensystem. Beschriften Sie das Koordinatensystem, die Funktionen und die Gewinnschwelle. Schraffieren und beschriften Sie in der Grafik den Bereich, in dem das Unternehmen Verlust macht.

a) Kostenfunktion: **y = 200x + 480‘000**
Erlösfunktion: **y = 400x**
Gewinnfunktion: **y = 200x-480‘000**

b)



Punkte	Kriterium
3	Kostenfunktion; Gewinnfunktion, Erlösfunktion
3	jede Funktion einzeichnen
1	Einheitenwahl auf x-Achse gemäss Lösungsvorlage
1	Einheitenwahl auf y-Achse gemäss Lösungsvorlage
1	Beschriftungen Achsen, Funktionen und Gewinnschwelle
1	Schraffur und Beschriftung Verlustzone

Aufgabe 9	Quadratische Funktion	6 Punkte

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel k_1 mit der Funktionsgleichung $k_1(x)$: $y = -0.5x^2 - 4x + 6$ mit der Gerade g, die durch die Punkte A (-7.5/20.25) und B (7.5/-2.25) verläuft.

Gerade g:

$$m = \frac{20.25 - (-2.25)}{-7.5 - 7.5} = -1.5$$

$$20.25 = (-1.5)\times(-7.5) + q \qquad \Rightarrow g: y = -1.5x+9$$

$$9 = q$$

Schnittpunkte:

$$-0.5x^2 - 4x + 6 = -1.5x + 9$$

$$-0.5x^2 - 2.5x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{6.25 - 4(-0.5)(-3)}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{2.5 + 0.5}{-1} = -3 \qquad y_1 = 13.5$$

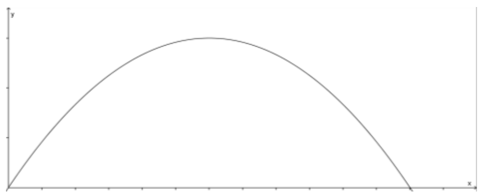
$$x_2 = \frac{2.5 - 0.5}{-1} = -2 \qquad y_2 = 12$$

$$\underline{\underline{S_1(-3/13.5) \quad S_2(-2/12)}}$$

Punkte	Kriterium
1	Steigung Gerade
1	y-Achsabschnitt Gerade
2	x-Koordinaten Schnittpunkte
2	y-Koordinaten Schnittpunkte

Aufgabe 10	Quadratische Funktion	9 Punkte

Das rote Riesenkänguru, das im Outback Australiens lebt, ist ein wahres Sprungtalent. Auf der Flucht vor seinen Erzfeinden, einem Rudel Dingos, kann es Sprünge erreichen, welche die Form einer Parabel mit Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{12}x^2 + x$ (Sprungweite x in Metern; Höhe y in Metern) beschreiben.



a) Wie weit und wie hoch kann das rote Riesenkänguru springen?

b) Nach welcher Sprungweite hat es die Höhe $\frac{21}{16}$ m erreicht?

a) Nullstellen und Scheitelpunkt berechnen:

$$0 = -\frac{1}{12}x^2 + x$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 12$ Das rote Riesenkänguru kann <u>12 Meter</u> weit springen.

$N_1(0/0) \qquad N_2(12/0)$

Scheitelpunkt:

$x_S = \frac{0+12}{2} = 6$ $\qquad y_S = -\frac{1}{12} \times 36 + 6 = 3$

S(6 / 3)

Die maximale Sprunghöhe des Kängurus ist <u>3 Meter</u>.

b)

$$\frac{21}{16} = -\frac{1}{12}x^2 + x$$

$$0 = -\frac{1}{12}x^2 + x - \frac{21}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\left(-\frac{1}{12}\right)\left(-\frac{21}{16}\right)}}{-\frac{1}{6}}$$

$x_1 = 1.5 \qquad x_2 = 10.5$

Das Känguru hat nach <u>1.5 und 10.5 Metern</u> eine Sprunghöhe von 1.3125 Metern.

Punkte	Kriterium
a) 2	Nullstellen
1	Antwortsatz
1	x-Koordinaten Scheitelpunkt
1	Antwortsatz Sprunghöhe
b) 1	Quadratische Gleichung
2	x_1 und x_2
1	Antwortsatz

Aufgabe 11 Lineare Optimierung 12 Punkte

In Rotterdam wird das grosse Containerschiff „MAERSK LINE" beladen. Es können zwei unterschiedliche Containertypen auf dem Schiff geladen werden: Typ Hamburg und Typ Nizza. Auf dem Schiff gibt es einen Bereich, in welchem nur Typ Hamburg untergebracht werden kann. Dort können 2'000 Container geladen werden. Dieser Bereich wird jeweils maximal gefüllt. Höchstens 60% der Totalfracht soll vom Typ Hamburg sein. Maximal hat es auf dem Schiff Platz für 8'500 Container. Ein durchschnittlicher Container Typ Hamburg wiegt 27 Tonnen, ein durchschnittlicher Container Typ Nizza wiegt 13 Tonnen. Das Schiff kann höchstens mit 120'000 Tonnen beladen werden. Es kann pro Container Typ Hamburg ein Gewinn von CHF 22'000.- und pro Container Typ Nizza ein Gewinn von CHF 16'000.- erzielt werden. Wie viele Container Typ Hamburg und Nizza muss das Containerschiff transportieren, damit der Gewinn unter den gegebenen Bedingungen maximal wird?

a) Bestimmen Sie die Definitionen.
b) Stellen Sie die Bedingungen und die Zielfunktion auf. Die Bedingungen müssen ***<u>nicht</u>*** nach y aufgelöst werden. Die Funktionsgleichungen müssen ***<u>nicht</u>*** gezeichnet werden, es ist ***<u>kein</u>*** Planungspolygon zu erstellen.

a) x = Anzahl Container Typ Hamburg in Stück y = Anzahl Container Typ Nizza in Stück
$D = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

a) (1) $x \geq 2'000$
(2) $x \leq 0.6(x + y)$
(3) $x + y \leq 8'500$
(4) $27x + 13y \leq 120'000$
(z) $z = 22'000x + 16'000y$

Punkte	Kriterium
1	Bezeichnung von x und y
1	Definitionsmenge
10	pro Funktionsgleichung 2 Punkte

Aufgabe 12	Lineare Optimierung	13 Punkte

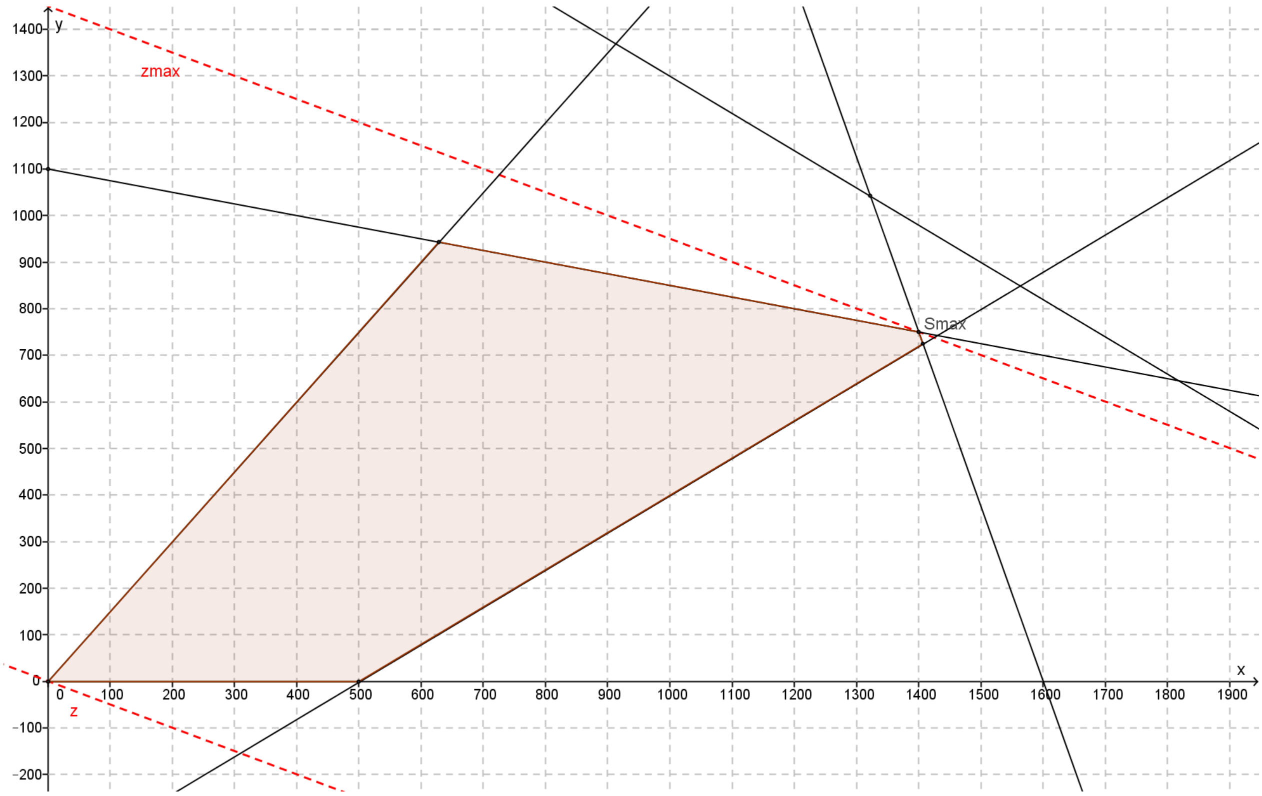
Bei einem weiteren Containerschiff mit dem Namen „M.O.L.“ bestehen für die Beladung die folgenden Bedingungen.

(D = ¥ $_0$x¥ $_0$)

(1) 30y + 24x ≤ 63’000
(2) y ≤ -1/4x + 1’100
(3) y ≤ -3.75x + 6’000
(4) -64y ≤ -96x
(5) y ≥ 0.8x - 400
(6) z = 13‘000x + 26‘000y

a) Stellen Sie die Normalform der Bedingungen auf und zeichnen Sie das Planungspolygon in das Diagramm auf der folgenden Seite ein.

1)	24x ≤ 63'000 - 30y	y ≤ -0.8x + 2'100
2)	y ≤ -1/4x + 1'100	y ≤ -0.25x + 1'100
3)	y ≤ -3.75x + 6'000	y ≤ -3.75x + 6'000
4)	-64y ≥ -96x	y ≤ 1.5x
5)	y ≥ 0.8x - 400	y ≥ 0.8x - 400
6)	z = 13‘000x + 26‘000y	y = -0.5x + z/26‘000



b) Zeichnen Sie die Zielfunktion ebenfalls ins Diagramm ein und berechnen Sie die Koordinaten für das Maximum mathematisch.
Schnittpunkt der Geraden (2) und (3):

$-1/4x + 1'100 = -3.75x + 6'000$
$3.5x = 4'900$
$x = 1'400$
$y = 750$
$\underline{\underline{S_{max}\ (1'400/750)}}$

c) Berechnen Sie den Wert für das Maximum gemäss Zielfunktion.

$z = 13'000x + 26'000y$
$z = 13'000 \times 1'400 + 26'000 \times 750$
$\underline{\underline{z = 37'700'000}}$

Aufgabe	Punkte	Kriterium
a)	3	3x Normalform erstellen (1,4,z)
	5	Einzeichnen pro Gerade
	1	Polygon ausmalen
b)	1	Zielfunktion einzeichnen
	2	Berechnen der Koordinaten im Maximum
c)	1	Berechnung des Maximum

Aufgabe 13	Finanzmathematik	7 Punkte

a) Vor 10 Jahren hat Michaela auf ein Konto CHF 50'000.- einbezahlt. Der Zinssatz betrug die ersten 6 Jahre 3%, danach 2%.
Welchen Betrag hat sie vor 5 Jahren einbezahlt, wenn ihr Guthaben auf diesem Konto heute CHF 100'000 beträgt? (auf 5 Rappen genau runden)

b) Wie hoch hätte der durchschnittliche Zinssatz während der ganzen Laufzeit auf dem Konto sein müssen, wenn ihr Guthaben auch ohne zusätzliche Einzahlung auf CHF 100'000.- angewachsen wäre? (in Prozent angeben, auf 2 Dezimalen runden)

a)

$$(50'000 \times 1.03^5 + x) \times 1,03 \times 1.02^4 = 100'000 \qquad | : 1,03 : 1.02^4$$

$$50'000 \times 1.03^5 + x = 89693.731 \qquad | - 50000 \times 1.04^5$$

$$x = 31'730.026$$

Die Einzahlung betrug <u>CHF 31'730.05</u>.

b)

$$50'000 \times x^{10} = 100'000$$

$$x = \sqrt[10]{2} = 1.071773$$

Der Zinssatz hätte <u>7.18%</u> sein müssen.

Punkte	Kriterium
a) 2	Gleichung aufstellen
2	Einzahlung berechnen
1	Schlusssatz
b) 1	Berechnung mit Wurzel
1	Schlusssatz mit richtig gerundeter Lösung

Fabio hat auf ein Konto einen Betrag von CHF 10'000.— einbezahlt. Für die erste Hälfte der Laufzeit rechnet er mit einem Zinssatz von 2%, für die zweite Hälfte mit 3%.Er rechnet, dass er am Schluss einen Betrag von CHF 24'314.95 auf seinem Konto haben wird. Wie lange müsste das Geld insgesamt auf dem Konto liegen?
(auf ganze Jahre runden)

$$10'000 \cdot 1.02^x \cdot 1.03^x = 24'314.95 \quad |:10'000$$

$$(1.02 \cdot 1.03)^x = 2.4315 \quad |\log_{1.0506}$$

$$x = 18.0000114$$

Punkte	Kriterium
1	Gleichung aufstellen
4	Berechnung von x; pro Fehler 2 Punkte Abzug
1	Schlusssatz

Die gesamte Laufzeit müsste <u>36 Jahre</u> betragen.

