Kanton St.Gallen
Bildungsdepartement

Berufs- und Weiterbildungszentrum
Rapperswil - Jona

Berufsmaturitätsprüfung M-Profil Mathematik 2014

Prüfungsbedingungen

- Erlaubte Hilfsmittel: netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner (keine CAS-Rechner) sowie die persönliche Formelsammlung, keine Handys.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und dargestellt sein. Gefordert ist auch eine klare Beschriftung aller Grafiken.
- Die Resultate müssen eindeutig dargestellt werden (doppelt unterstreichen). Doppellösungen und auch unbelegbare Resultate werden nicht bewertet. Ungültige Lösungen und Lösungsansätze müssen durchgestrichen werden. Textaufgaben verlangen einen Schlusssatz.
- Alle Aufgaben sind in diesem Aufgabendossier zu lösen. Am Ende sind alle Unterlagen (mit Namen versehen) abzugeben.
- Platz für zusätzliche Berechnungen finden Sie auf den letzten Seiten dieser Prüfung.

Prüfungsdatum: **Dienstag, 03. Juni 2014, 0800 - 1000 Uhr (120 Minuten)**

Name / Vorname: ....Lösungen..........

Aufgabe	Maximale Punktzahl	Erreichte Punktzahl
1	6	
2	6	
3	6	
4	3	
5	10	
6	6	
7	4	
8	13	
9	13	
10	12	
11	13	
12	8	
Total	100	
NOTE		

Kandidatennummer: ....

Sperrfrist :

Diese Prüfungsaufgaben dürfen nicht vor dem **1. September 2015** zu Übungszwecken verwendet werden.

Experte 1: ....

Experte 2: ....

Aufgaben

1. Aufgabe: Lineare Gleichungen

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge de nachfolgenden Gleichung in der Grundmenge Q. Punkte 6

$$3 \cdot x + \frac{6 \cdot x + 3}{9} = 16 - \frac{7 \cdot x + 19}{2} + \frac{4 \cdot x + 10}{14}$$

$| \cdot kgV = 126$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q}$ (1)

$$378x + 84x + 42 = 2016 - (441x + 1197) + 36x + 90$$

$$378x + 84x + 42 = 2016 - 441x - 1197 + 36x + 90 \quad (4)$$

$$462x + 42 = -405x + 909 \quad | + 405x - 42$$

$$867x = 867 \quad | : 867$$

$$x = 1 \qquad \mathbb{L} = \{1\} \quad (1)$$

· Gleichung auflösen : pro Fehler 2 Punkte Abzug

2. Aufgabe: Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und Lösungsmenge des nachfolgenden Gleichungssystems in der Grundmeng Q x Q. Punkte 6

(1) $5\cdot\left(\frac{x}{5}-1\right)-3\cdot(4+2\cdot y)=16$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (1)

(2) $4\cdot(3\cdot y-2)=3\cdot x+5$

a) Gleichungen vereinfachen

(1) $\frac{5x}{5} - 5 - 12 - 6y = 16$

$x - 5 - 12 - 6y = 16 \quad | +17$

$x - 6y = 33$

(2) $12y - 8 = 3x + 5 \quad | -3x \; +8$

$-3x + 12y = 13$

b) Additionsmethode

$$\begin{array}{l|l|l} (1) & x - 6y = 33 & \cdot 3 \\ (2) & -3x + 12y = 13 & \end{array}$$

1. Variable bestimmen (2)

$$\begin{array}{l|l|} (1) & 3x - 18y = 99 \\ (2) & -3x + 12y = 13 \end{array}$$

2. Variable bestimmen (2)

$-6y = 112$

$y = -18\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ in I $x - 6\cdot(-18\frac{2}{3}) = 33$

$x = -79$

$\mathbb{L} = \{(-79 / -18\frac{2}{3})\}$ (1)

3. Aufgabe: Lineare Gleichungen, Textgleichungen

Von drei natürlichen Zahlen ist die zweite Zahl dreimal so gross wie die erste Zahl. Die Summe der zweiten und dritten Zahl ergibt 119. Die Summe der ersten und zweiten Zahl ergibt die dritte Zahl. Wie heissen die drei Zahlen?

Punkte 6

Definitionen $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

1. Zahl: x

2. Zahl: $3x$ — Definition Zahl 1–3, Definitionsmenge (3)

3. Zahl: $119 - 3x$

Gleichung

$x + 3x = 119 - 3x$ — Gleichung aufstellen (1)

$4x = 119 - 3x \quad | +3x$

$7x = 119$ — Gleichung lösen (1)

$x = 17$

Die 1. Zahl ist 17, die zweite Zahl 51 und die 3. Zahl 68.

Antwortsatz (1)

4. Aufgabe: Quadratische Gleichung

Gegeben ist die Gleichung: $x^2 - 3 \cdot x + m = 0$ $\quad$ G = R $\quad$ Punkte 3

Für welche Werte des Parameters m hat die Gleichung genau <u>eine</u> Lösung?

Bedingung / Ansatz: Diskriminante = 0

abc - Lösungsformel: $a = 1$, $b = (-3)$, $c = m$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m}}{2 \cdot 1} \quad (1)$$

$$\sqrt{9 - 4m} = 0 \quad | \ldots^2 \qquad (1)$$

$$9 - 4m = 0 \quad | +4m$$

$$9 = 4m \quad | :4$$

$$\frac{9}{4} = m \qquad (1)$$

Für $m = \frac{9}{4}$ (2.25) ergibt sich genau eine Lösung.

5. Aufgabe: Gleichungen und Gleichungssysteme

Für zwei Darlehen von CHF 120 000.– und CHF 80 000.– werden im ersten Jahr CHF 12 800.-- Zinsen bezahlt. Bei umgekehrten Zinsssätzen wären die Zinsen CHF 400.-- höher.
Definieren Sie die Variablen und berechnen Sie die ursprünglich angewendeten Zinssätze in %.

Punkte 10

Definitionen

x: Zinssatz in % des Darlehens von CHF 120'000.-
y: Zinssatz in % des Darlehens von CHF 80'000.-
$\mathbb{D} = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

(1)

Gleichungssystem

$$(1)\quad \frac{120'000 \cdot x\%}{100\%} + \frac{80'000 \cdot y\%}{100\%} = 12'800$$

$$(2)\quad \frac{120'000 \cdot y\%}{100\%} + \frac{80'000 \cdot x\%}{100\%} = 12'800 + 400$$

(2)

Gleichungssystem vereinfachen und lösen

$$(1)\quad 1200x + 800y = 12800 \quad \Rightarrow \quad 12x + 8y = 128 \quad | \cdot 2$$

$$(2)\quad 1200y + 800x = 13200 \quad \Rightarrow \quad 8x + 12y = 132 \quad | \cdot 3$$

$$24x + 16y = 256$$

$$-\quad 24x + 36y = 396$$

$$-20y = -140$$

$$y = 7$$

$$12x + 8 \cdot 7 = 128$$

$$12x = 72$$

$$x = 6$$

(6)
pro Fehler 2 Punkte Abzug

Der Zinssatz für das Darlehen von 120'000.- beträgt 6 % für das Darlehen von 80'000.- beträgt der Zinssatz 7 %

(1)

6. Aufgabe: Potenzen

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich. Punkte 6

$$a^8 \div \left[a^6 \cdot \left(\frac{3 \cdot a^4 \cdot b^6}{2^3} \div \frac{a^2 \cdot b^5}{8} \right)^{-2} \right]$$

$$a^8 : \left[a^6 \cdot \left(\frac{3a^4b^6 \cdot 2^3}{2^3 \cdot a^2 b^5} \right)^{-2} \right]$$

$$a^8 : \left[a^6 \cdot \left(3a^2b \right)^{-2} \right]$$

$$a^8 : \left[a^6 \cdot 3^{-2} \cdot a^{-4} \cdot b^{-2} \right]$$

$$a^8 : \left[\frac{a^6}{3^2 a^4 b^2} \right]$$

$$\frac{a^8 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot b^2}{a^6} = \underline{\underline{9a^6b^2}}$$

pro Fehler 2 Punkte Abzug

je 2 Punkte für
Zahl: 9
a-Potenz: a^6
b-Potenz: b^2

7. Aufgabe: Logarithmen

Bestimmen Sie durch Ankreuzen die richtigen Umformungen der nachfolgenden Logarithmenterme und Logarithmengleichungen. Nur eine Antwort ist richtig. Punkte 4

Term (A)	Lösungen		Richtig
$\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^4}}\right) = x$	(1)	$a^{-\frac{4}{7}}$	O
	(2)	$\frac{4}{7}$	O
	(3)	$\frac{7}{4}$	O
	(4)	$-\frac{4}{7}$	$\cancel{O}$

(2)

$\log_a \frac{1}{a^{\frac{4}{7}}} = x$

$\log_a a^{-\frac{4}{7}} = x$

$-\frac{4}{7} = x$

Term (B)	Lösungen		Richtig
$\log_{4x}\left(\frac{1}{8}\right) = -4$	(1)	$2^{-\frac{5}{4}}$	$\cancel{O}$
	(2)	( )	O
	(3)	-1	O
	(4)	$2^{\frac{5}{4}}$	O

(2)

$(4x)^{-4} = \frac{1}{2^3} \quad | \sqrt[-4]{\ }$

$4x = \sqrt[-4]{2^{-3}} = 2^{\frac{-3}{-4}} = 2^{\frac{3}{4}} \quad | :4$

$x = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^2} = 2^{\frac{3}{4}-2} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{8}{4}} = 2^{-\frac{5}{4}}$

nur richtig / falsch

8. Aufgabe: Lineare Funktionen

Der FC St. Gallen überlegt sich eine Modernisierung der Billett-Tarfifstruktur im Hinblick auf die neue Fussballsaison: Punkte 13

- Tarif A: Eine Saisonkarte für die Heimspiele im Sektor A kostet CHF 750.--.
- Tarif B: Mitglieder zahlen einen Einmalbeitrag von CHF 150.– und dann CHF 45.-- pro Spiel.
- Tarif C: Der Eintritt zu jedem Spiel kostet CHF 60.–.
- Tarif D: Die Teilzeitsaisonkarte soll neu angeboten werden. Diese soll zu einem Pauschalpreis von CHF 500.-- erworben werden können. Darin eingeschlossen ist der Besuch von insgesamt 15 Heimspielen, die innerhalb der Saison besucht werden dürfen. Falls dann noch weitere Spiele besucht werden, kostet der Eintritt pro Spiel noch CHF 25.–.

a) Bestimmen Sie die Definitionen und die Funktionsgleichungen der linearen Funktionen für jede der vier Tarife.

Definitionen

x : Anzahl Spiele

y : Kosten in CHF

$\mathbb{D}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Q}^+$ (1)

Funktionsgleichungen

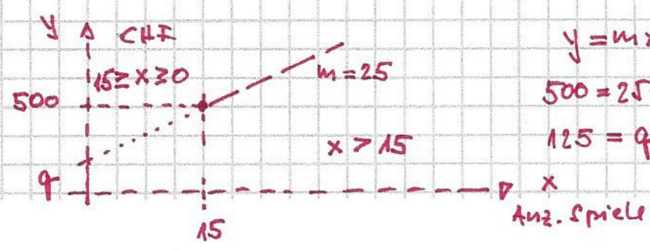
Tarif A: $y = 750$ (1)

Tarif B: $y = 45 \cdot x + 150$ (1)

Tarif C: $y = 60 \cdot x$ (1)

Tarif D: $y_1 = 500$ für $x \geq 0$; $x \leq 15$ inkl. Bereich (1)

$y_2 = 25x + 125$ für $x > 15$ inkl. Bereich (1)

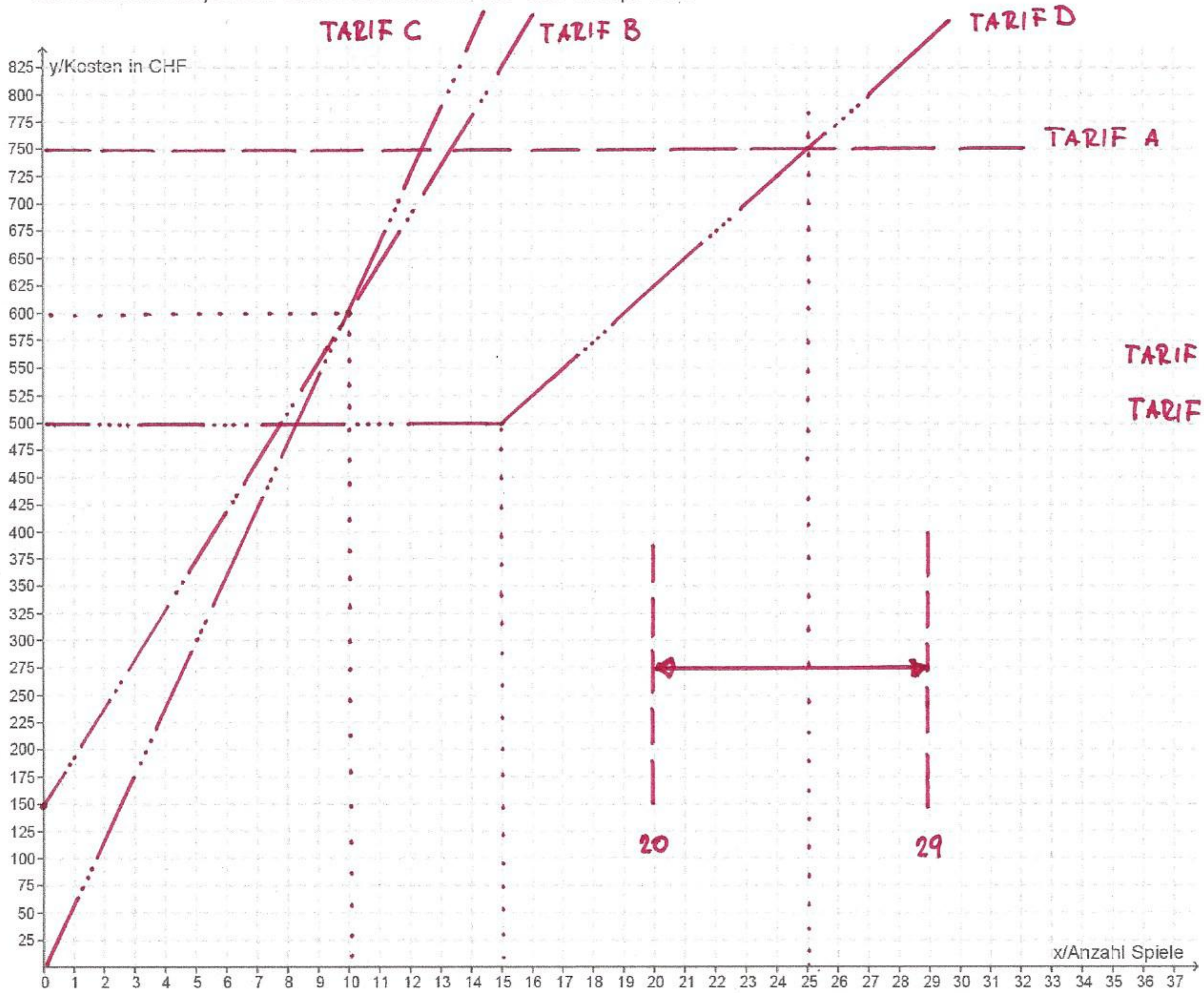


$y = mx + q$ $m = 25$

$500 = 25 \cdot 15 + q$ $x = 15$

$125 = q$ $y = 500$

b) Tragen Sie die Graphen für jeden der vier Tarife im nachfolgenden Koordinatensystem ein. Beschriften Sie die Graphen.



(5)

TARIF A, B, C, je (1)

TARIF D, (2)

c) Welche Tarifstruktur soll ein Fussballfan wählen, wenn er beabsichtigt, zwischen 20 und 29 Heimspiele in der Saison zu besuchen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Schnittpunkt A – D liegt bei (25/500)

$750 = 25x + 125 \Rightarrow x = 25$

Antwort: Zwischen 20 und 24 Spielen soll Tarif D gewählt werden
Bei 25 Spielen sind Tarif A und D gleich teuer
Zwischen 26 und 29 Spielen soll er Tarif A wähen

(2)

9. Aufgabe: Quadratische Funktionen

Gegeben sind zwei Parabeln mit folgenden Funktinsgleichungen: Punkte 13

$f_1(x) \quad y = x^2 - 6 \cdot x + 6 \qquad f_2(x) \quad y = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot x - \frac{11}{4}$

a) Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Parabel f_1. Runden Sie die Resultate der Lösungen auf zwei Dezimalstellen genau.

$0 = x^2 - 6x + 6 \qquad a = 1 \; ; \; b = (-6) \; ; \; c = 6$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \qquad x_1 = 4.73 \quad x_2 = 1.27$$

Nullstelle 1 liegt bei $x = 4.73$ $\quad (4.73 / 0.00)$ (2)

Nullstelle 2 liegt bei $x = 1.27$ $\quad (1.27 / 0.00)$ (2)

Scheitelpunkt

$x_S = \frac{4.73 + 1.27}{2} = 3 \qquad y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3 \qquad S(3/-3)$ (2)

1 Punkt wenn nur 1 Koord. richtig

b) Bestimmen Sie von f_2 die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse.

$S_y\left(0 \,\middle|\, -\frac{11}{4}\right)$ je 1 Punkt pro Koordinate (2)

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabeln f_1 und f_2.

$x^2 - 6x + 6 = \frac{-3x^2}{4} + \frac{9x}{2} - \frac{11}{4} \quad | \cdot 4$ (1)

$4x^2 - 24x + 24 = -3x^2 + 18x - 11 \quad | +3x^2 \; -18x \; +11$

$7x^2 - 42x + 35 = 0 \quad | :7$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad y_1 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 6 = 1$

$x_2 = 5 \quad y_2 = 25 - 5 \cdot 6 + 6 = 1$

$S_1(1 \mid 1)$ $S_2(5 \mid 1)$

(2) (2)

10. Aufgabe: Lineare Optimierung

Punkte 12

Bauer Beat Lutz bewirtschaftet einen Landwirtschaftsbetrieb im St. Galler Rheintal mit einer Fläche von insgesamt 25 ha (Hektaren).
Davon möchte er im nächsten Jahr insgesamt 18 ha mit Mais und Raps bepflanzen. Aus wirtschaftlichen Gründen muss er mindestens 30 % mehr Mais als Raps anbauen. Der Düngemittelverbrauch liegt bei 500 kg pro ha Raps und bei 400 kg pro ha Mais. Für die saisonale Bewirtschaftung rechnet Bauer Lutz mit 50 Traktorstunden pro ha Raps und mit 35 Traktorstunden für eine ha Mais.
Bauer Beat Lutz möchte höchstens 4 000 kg Düngemittel einsetzen. Da er den Traktor noch anderweitig benötigt, möchte er für den Mais- und Rapsanbau insgesamt höchstens 1 000 Traktorstunden einsetzen.
Aus seiner Kostenrechnung entnimmt er, dass pro ha Mais Selbstkosten von CHF 3 700.– und pro ha Raps CHF 4 750.– anfallen. Die Verkaufspreise pro ha schätzt Bauer Lutz auf CHF 4 000.-- beim Mais und CHF 5 200.-- beim Raps.

Wie viele ha Mais und Raps muss Lutz anpflanzen, damit der Gewinn unter den gegebenen Bedingungen maximal wird?

Bestimmen Sie die Definitionen und stellen Sie die Bedingungen (Ungleichungen) mit Zielfunktion auf. Die Bedinungen müssen **nicht** nach y aufgelöst werden. Die Graphen der Funktionen müssen **nicht** gezeichnet werden und es ist **kein** Planungspolygon zu erstellen.

Definitionen

x : Anzahl ha Mais (1)

y : Anzahl ha Raps

$\mathbb{D} = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ (1)

Bedingungen

(1) $x \geq 0$ (1)

(2) $y \geq 0$

(3) $x + y \leq 18$ (1.5)

(4) $x \geq 1.3y$ (1.5)

(5) $400x + 500y \leq 4000$ (2)

(6) $35x + 50y \leq 1000$ (2)

Zielfunktion

$z_{max} = 300x + 450y$ (2)

11. Aufgabe: Lineare Optimierung

a) Formen Sie die gegebenen Bedingungen zu Grenzgeraden um und zeichnen Sie das Planungspolygon in das Diagramm auf der folgenden Seite. Punkte 13

(1) $y \geq -0.8 \cdot x + 850$

(2) $30 \cdot x + 70 \cdot y \leq 98000$

(3) $y \geq 0.6 \cdot x - 350$

(4) $y \leq -\frac{1}{6} \cdot x + 1200$

(5) $y \leq 5 \cdot x$

(6) Zielfunktion

$Z = 100 \cdot x + 250 \cdot y$

1) $y \geq -\frac{4}{5}x + 850$ (1)

2) $y \leq -\frac{3}{7}x + 1'400$

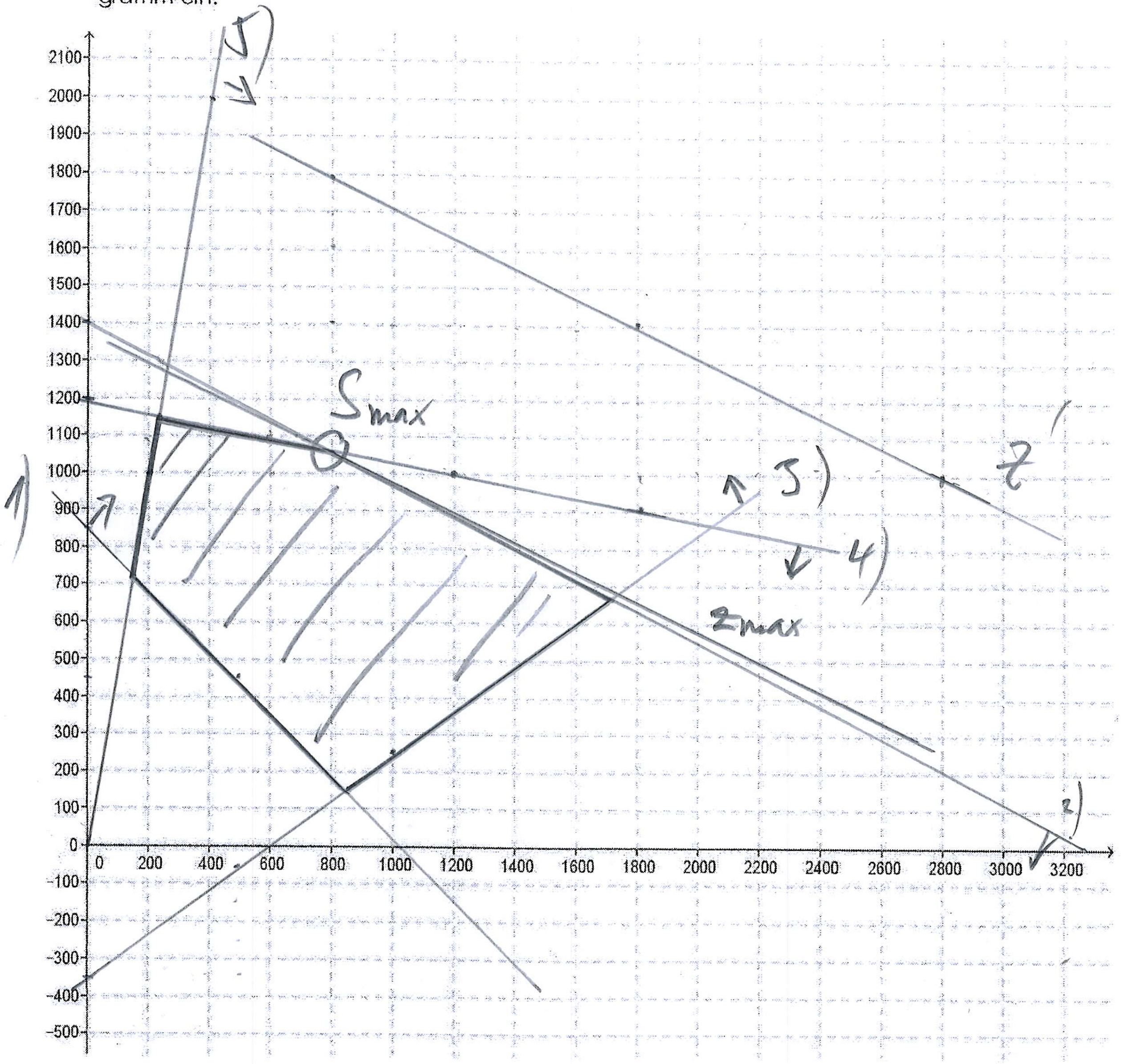
3) $y \geq \frac{3}{5}x - 350$

4) $y \leq -\frac{1}{6}x + 1'200$ (1)

5) $y \leq 5x$

Zielfunktion $y = \boxed{-\frac{2}{5}}\,x + \frac{Z}{250}$

b) Zeichnen und beschriften Sie das Planungspolygon in das nachfolgende Diagramm ein.



c) Zeichnen Sie die Zielfunktion ins obige Diagramm ein und berechnen Sie die Koordinaten für das Maximum. Berechnen Sie zudem den Wert des Maximums gemäss Zielfunktion.

S_{max}: 2) ∩ 4)

$$-\frac{3}{7}x + 1'400 = -\frac{1}{6}x + 1'200$$

$$x = 763,\overline{63} \qquad y = 1072,\overline{72}$$

S_{max}: $\underline{\underline{(763,63 / 1072,73)}}$

$$z_{max} = 100 \cdot 763,\overline{63} + 250 \cdot 1072,\overline{72} = \underline{\underline{344'545.45}}$$

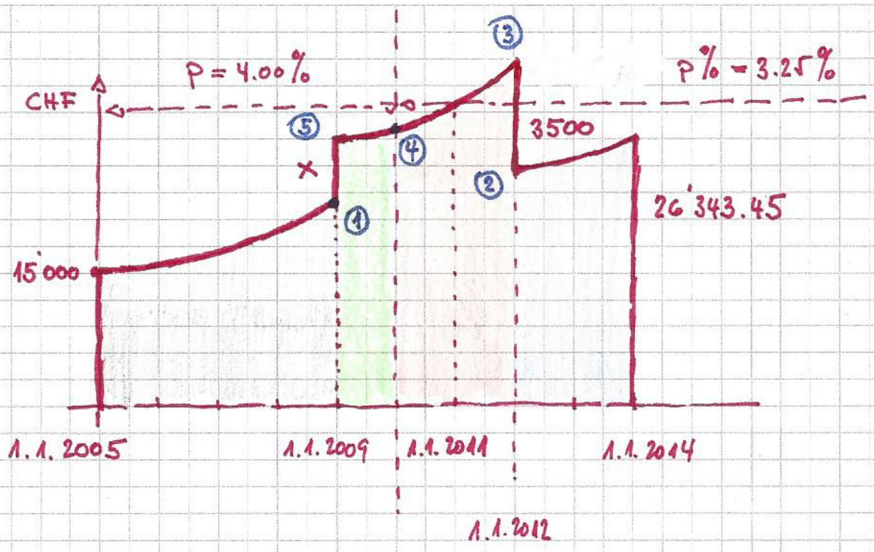
12. Aufgabe: Finanzmathematik

Von einem Sparkontosind folgende Angaben bekannt: Punkte 8

- Kontoeröffnung zu Beginn des Jahres 2005 mit einer Einlage von CHF 15 000.–
- Einzahlung eines unbekannten Betrages in CHF am Anfang es Jahres 2009
- Bezug von CHF 3 500.-- am Ende des Jahres 2011

Am 1.1.2014 liegt ein Betrag von CHF 26 343.45 auf dem Sparkonto. Der Zinssatz betrug während den ersten fünf Jahren 4.00% und während den restlichen Jahren 3.25%.

Wie gross war die Einzahlung zu Beginn des Jahres 2009? Das Resultat ist auf 5 Rappen genau zu runden.



(Analyse) (1)

① $15000 \cdot 1.04^{4} = 17'547.88$

② $26'343.45 \cdot 1.0325^{-2} = 24'711.13$

③ $24'711.13 + 3500 = 28'211.13$

④ $28'211.13 \cdot 1.0325^{-2} = 26'463.08$

⑤ $26'463.08 \cdot 1.04^{-1} = 25'445.27$

$\Delta = 7'897.39$

(je Berechnung 1 Pkt) (6)

Die Einzahlung betrug CHF 7'897.40 (1)

(Schlusssatz)