Kanton Glarus
Departement Bildung und Kultur

Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus
Berufsmaturität

Berufsmatura / Abschlussprüfung 2018

Ausrichtung Typ WD-W BM1

Grundlagenfach Mathematik

Dauer 120 Minuten

****

Kandidaten-Nummer ______________________________

Name/Vorname ______________________________

Geburtsdatum ______________________________

****

Prüfungsbedingungen

- Erlaubte Hilfsmittel: netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner (keine CAS-Rechner) sowie die Formelsammlung des Lehrmittels „Mathematik in der Wirtschaftsschule“, whv-Verlag, keine Mobiles.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und dargestellt sein. Gefordert ist auch eine klare Beschriftung aller Grafiken.
- Die Resultate müssen eindeutig markiert und dargestellt werden. Textaufgaben verlangen einen Lösungssatz.
- Doppellösungen und unbelegte Resultate werden nicht bewertet.
- Ungültige Lösungen und Lösungsansätze müssen durchgestrichen werden.
- Alle Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Lösungsbereichen innerhalb dieses Dossiers zu lösen. Allfällig verwendete Zusatzblätter werden nicht bewertet.

Lösungsvorlage

Aufgabe 1 Grundlagen 5 Punkte

a) Fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

$a - 2b^2 - 2(a + b)(a - b) =$

$a – 2b^2 – (2a^2 – 2b^{2)} = a – 2b^2 - 2a^2 + 2b^2 = \underline{\underline{-2a^2 + a}}$

b) Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

$18a^2 - 48a + 32$

$2(9a^2 – 24a + 16)$

$\underline{\underline{2(3a – 4)^2}}$

Punkte		Kriterium
a)	3	Pro Fehler 1 Punkt Abzug
b)	2	Faktor 2 ausklammern => 1 Punkt Faktorisierung nach 2.Binomischer Formel => 1 Punkt

Aufgabe 2 Lineare Gleichungen 5 Punkte

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge für die Variable x der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

$$\frac{3}{2x + 2a} + \frac{1}{3} = \frac{2}{x + a} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{2x + 2a} + \frac{1}{3} = \frac{2}{x + a} - \frac{1}{6}$$

$D = \mathbb{Q}\backslash\{-a\}$

HN: $6(x + a)$

$9 + 2x + 2a = 12 – x – a$
$3x = 3 – 3a$
$x = 1 – a$

$L = \{1 - a\}$

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
1	Hauptnenner bestimmen
1	Mit HN multiplizieren => Brüche eliminieren
1	x bestimmen
1	Lösungsmenge

Aufgabe 3 Quadratische Gleichungen 6 Punkte

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung für die Variable x in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$-2x + \frac{8x - 3}{x + 3} = 4 - \frac{3x^2}{x + 3}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

HN: $(x + 3)$
$-2x(x + 3) + 8x - 3 = 4(x + 3) - 3x^2$

$x^2 - 2x - 15 = 0$
$(x + 3)(x - 5) = 0$

$L = \{5\}$

=> $x_2 = -3$ aus D ausgeschlossen!

Punkte	Kriterium
1	Definitionsmenge
2	Hauptnenner bestimmen und Brüche durch Multiplikation mit HN eliminieren, dann Klammern auflösen
1	Quadratische Gleichung Null setzen
1	x bestimmen mit abc-Formel oder Faktorisieren
1	Lösungsmenge

Aufgabe 4 Textaufgaben 9 Punkte

Für eine Gewürzmischung verwendet ein Spezialgeschäft zwei Grundsorten. Wenn es vier kg der Sorte A mit sechs kg der Sorte B mischt, kostet ein Kilogramm der Mischung CHF 18.40. Wenn es aber die Sorte A im Verhältnis 1 : 3 mit der Sorte B mischt, kostet das Kilogramm der Mischung CHF 19.–.
Bestimmen Sie die Definition(en), stellen Sie die Gleichung(en) auf und notieren Sie die Definitionsmenge(n).
Wie viel kostet ein Kilogramm der Sorte A? Runden Sie auf 5 Rappen genau.

x: Preis Sorte A in CHF pro Kilogramm

y: Preis Sorte B in CHF pro Kilogramm

(1) $4x + 6y = 10 \cdot 18.4$
(2) $x + 3y = 4 \cdot 19 \qquad |\cdot (-4)$

$D = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

$6y - 12y = -120$
$y = 20$

$x = 76 - 3 \cdot 20 = 16$

Ein Kilogramm der Sorte A kostet CHF 16.-
.

Punkte	Kriterium
1	Definitionen für x und y 0.5 Punkte Abzug bei fehlenden Masseinheiten
1	Definitionsmenge
2	Gleichungen aufstellen
4	Gleichungen mit einem Verfahren auf lösen => ein Fehler: 2 Punkte zwei Fehler: 1 Punkt
1	Antwortsatz; 0.5 P. Abzug fehlende Masseinheit; 0.5 P. Abzug, falls falsch gerundet.

Aufgabe 5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen 10 Punkte

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich. Schreiben Sie das Resultat als Potenz.

$$\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 \cdot \sqrt[6]{y} \cdot \sqrt{y^{-1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)^5 \cdot \sqrt[6]{y^{-5}} \cdot (x)^2}$$

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{5}{12}} \cdot y^{-\frac{5}{6}} \cdot x^2} = x^{\frac{3}{4}+\frac{5}{12}-2} \cdot y^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}} = x^{-\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{6}}}$$

Punkte	Kriterium
2	Wurzelterme in Potenzen umwandeln, pro Fehler 0.5 Punkte Abzug
1	Potenzen mit Basis x zusammenfassen
1	Potenzen mit Basis y zusammenfassen

b) Bestimmen Sie x, so dass eine wahre Aussage entsteht (Resultate allenfalls auf 3 Dezimalstellen runden; Grundmenge ℝ):

Definitionsmenge	Berechnung	Lösungsmenge
$D = ¡^{+}$	$\log_{(3x)} 2 = 4$ $(3x)^4 = 2 \quad \mid \sqrt[4]{\ }$ $3x = 1.189 \mid :3$ $x = 0.396$	$L = \{0.396\}$

Punkte	Kriterium
0.5	Definitionsmenge
1	Logarithmusgleichung als Potenzgleichung umformulieren
1	x berechnen
0.5	Lösungsmenge

c) Bestimmen Sie x, so dass eine wahre Aussage entsteht (Resultate allenfalls auf 3 Dezimalen runden; Grundmenge ℝ):

$$3^{5x} = \frac{1}{9} \cdot 3^{10x+1}$$

Definitionsmenge	Berechnung	Lösungsmenge
D = ¡	$3^{5x} = \frac{1}{9} \times 3^{10x+1}$ $3^{5x} = 3^{-2} \times 3^{10x+1}$ |1.Potenzgesetz $3^{5x} = 3^{10x-1}$ |Exponentenvergleich $5x = 10x - 1$ $1 = 5x$ $x = 0.2$	$L = \{0.2\}$

Punkte	Kriterium
0.5	Definitionsmenge
1	Anwendung 1. Potenzgesetz
1	Exponentenvergleich und x berechnen
0.5	Lösungsmenge

Aufgabe 6 Lineare Funktionen 6 Punkte

a) Berechnen Sie die Normalform der Geraden g_1, welche im obenstehenden Koordinatensystem eingezeichnet ist? (2 Punkte)

b) Zeichnen Sie die Gerade g_2 mit der Normalform $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ebenfalls in das Diagramm ein. Die Gerade ist entsprechend zu beschriften. Die Gerade ist im Bereich von x = -9 bis x = 9 einzuzeichnen.

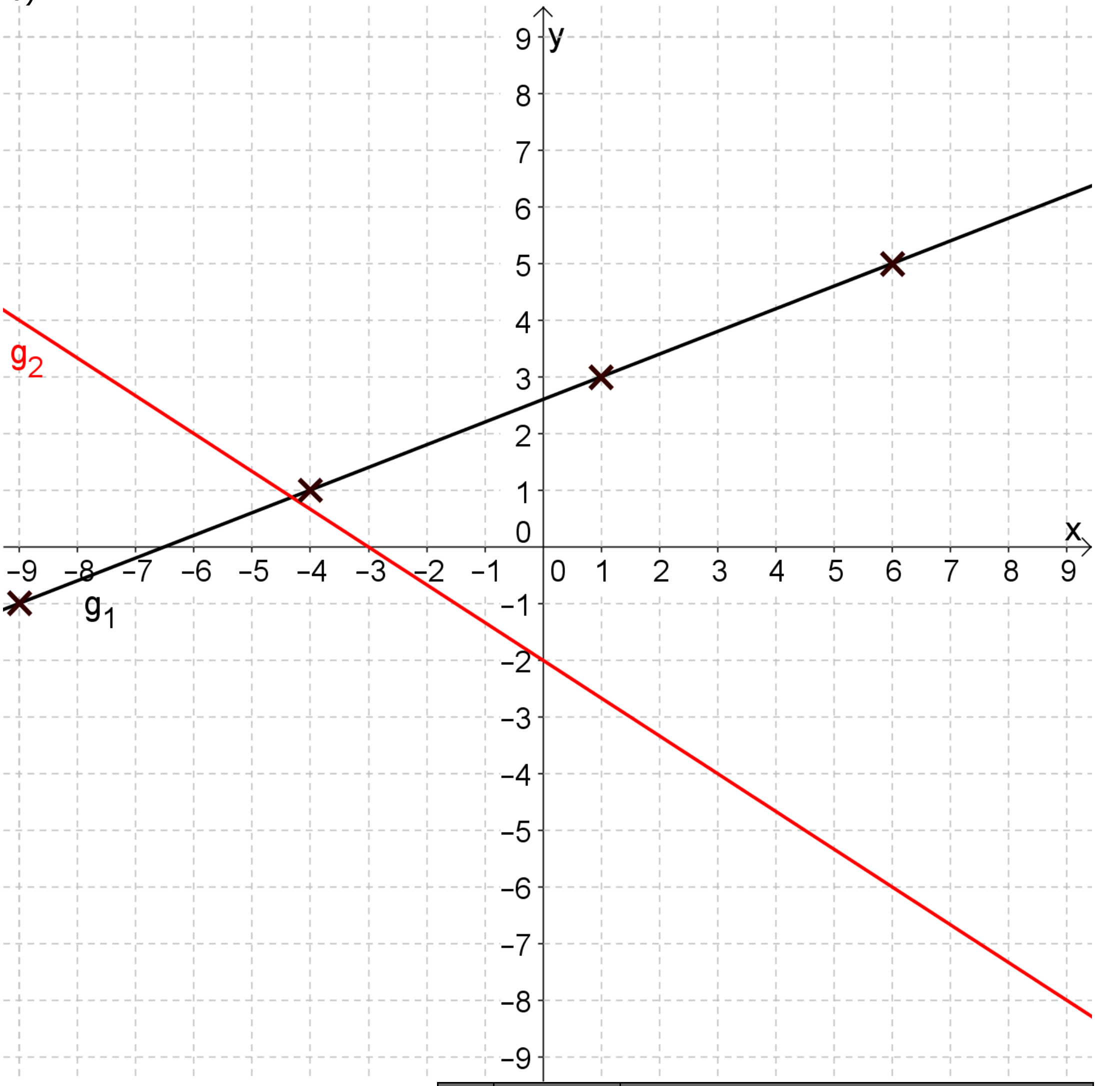
c) Wie lautet die Normalform der Geraden g_3, die in einem rechten Winkel zur Gerade g_1 verläuft und die x-Achse bei 6 schneidet?

a) Zum Beispiel: $P_1(-4|1)$ und $P_2(1|3)$

$$m = \frac{2}{5}$$

$$q = 3 - 1 \times \frac{2}{5} = 2.6 \qquad g_1 : y = \frac{2}{5}x + 2.6$$

b)



c)

g_3: m = -2.5

$S_x(6|0)$

0 = -2.5 · 6 + q
q = 15 g_3: <u>y = -2.5x + 15</u>

	Punkte	Kriterium
a)	2	m berechnen => 1 Punkt; q berechnen => 1 Punkt bei fehlender Funktionsgleichung 0.5 Punkt Abzug
b)	2	Gerade einzeichnen im Bereich von -9<x<9 Fehlende Beschriftung => 0.5 Punkte Abzug; leichte Ungenauigkeit => 0.5 Punkte Abzug
c)	2	m bestimmen => 1 Punkt q berechnen=> 1 Punkt bei fehlender Funktionsgleichung 0.5 Punkt Abzug

Aufgabe 7	**Quadratische Funktion**	**10 Punkte**

Gegeben ist die quadratische Funktion p_1 mit der Normalform $y = 10.5x^2 + 42x + 10.5$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen. Runden Sie, falls nötig, korrekt auf 2 Dezimalstellen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes. Runden Sie, falls nötig, korrekt auf 2 Dezimalstellen.

c) In welchem Punkt (Koordinaten) schneidet die Parabel die y-Achse. Runden Sie, falls nötig, korrekt auf 2 Dezimalstellen.

d) Wie lautet die Normalform der Geraden g_1, welche durch den Scheitelpunkt der Parabel und den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse verläuft?

e) Zeichnen Sie die Graphen der quadratischen Funktion p_1 sowie die Funktion der Geraden g_1 aus Aufgabe d) ins nachfolgende Diagramm ein. Beschriften Sie die beiden Graphen wie auch die zuvor berechneten Punkte.

a) $N_1(-0.27|0)$ und $N_2(-3.73|0)$

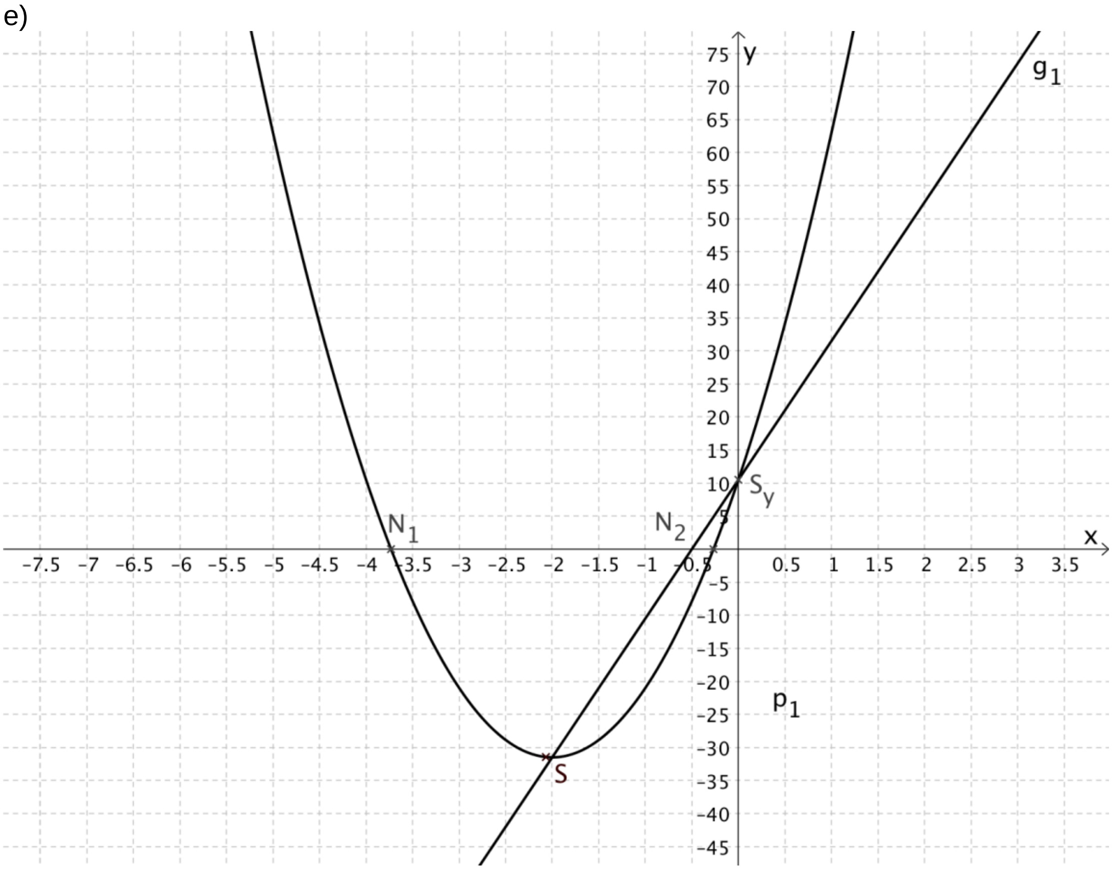
b) $S(-2|-31.5)$

c) $S_y(0|10.5)$

d) $m = \dfrac{10.5 + 31.5}{0 + 2} = 21 \quad q = 10.5$

$g_1: y = 21x + 10.5$

e)

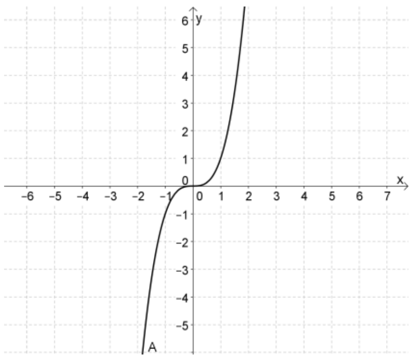


	Punkte	Kriterium
a)	2	1 Punkt pro Nullstelle
b)	2	Je 1 Punkt für x- und y-Koordinate
c)	1	Keine Teilpunkte => x-Koordinate 0 ist nötig für den Punkt!
d)	2	m berechnen => 1 Punkt; q berechnen => 1 Punkt
e)	3	Parabel 1 Punkt; Gerade 1 Punkt Beschriftung aller Funktionen und berechneten Punkte 1 Punkt

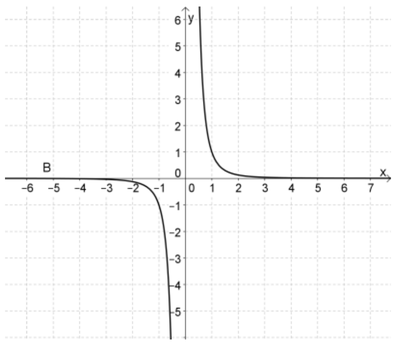
Aufgabe 8 Potenz-, Wurzel-, Exponential-, Logarithmusfunktion 2 Punkte

Ordnen Sie die nachfolgenden Funktionsgraphen den entsprechenden Funktionsgleichungen zu.

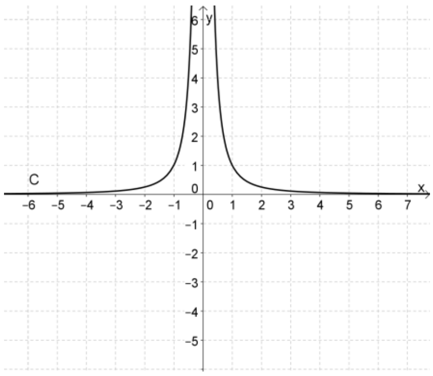
A



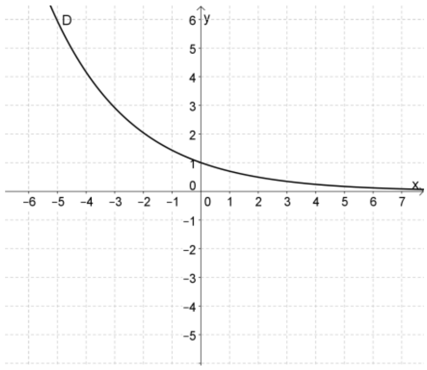
B



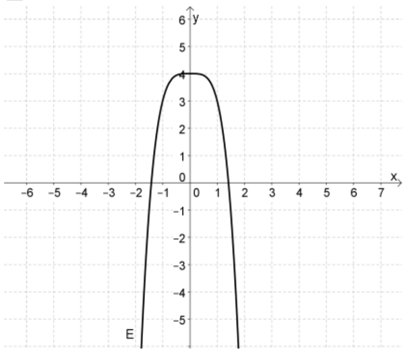
C



D



E



Funktion	Graph
$y = x^{-2}$	**C**
$y = x^{3}$	**A**
$y = 0.7^{x}$	**D**
$y = -x^{4} + 4$	**E**

Punkte	Kriterium
2	Pro Fehler 0.5 Punkte Abzug

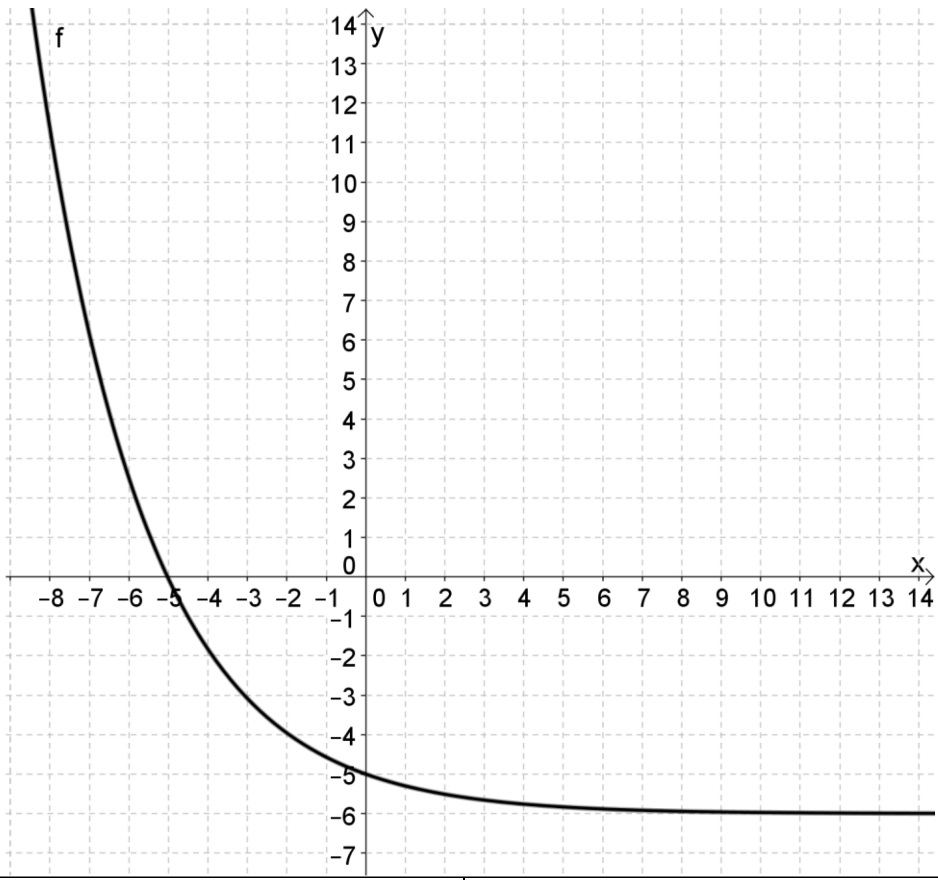
Aufgabe 9 Exponentialfunktion 8 Punkte

Gegeben ist die Exponentialfunktion

$f: y = 0.7^x - 6$

a) Stellen Sie den Graphen der Exponentialfunktion im untensteheden Koordinatensystem dar (inkl. Beschriftung)
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (Runden Sie auf 2 Dezimalstellen).
c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion f.

a)



b) S_x:

$0 = 0.7^x - 6$

$6 = 0.7^x \quad |\log_{0.7}$ $\qquad S_x(-5.02|0)$

$-5.02 = x$

S_y:

$y = 0.7^0 - 6$

$y = -5$ $\qquad S_y(0|-5)$

c) Umkehrfunktion: $y = \log_{0.7}(x+6)$

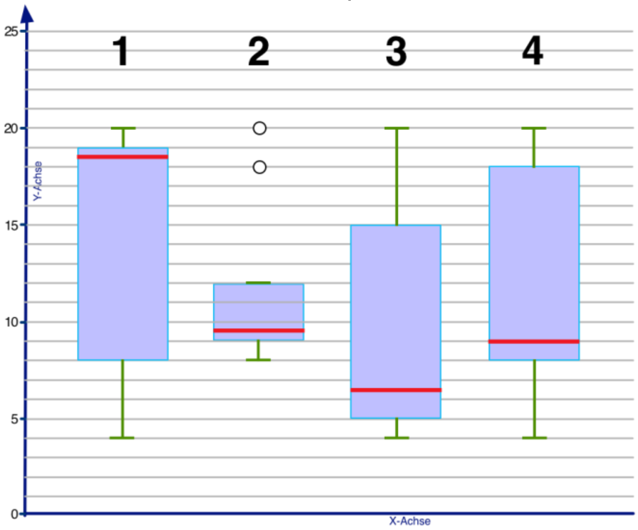
	Punkte	Kriterium
a)	4	2 Punkte pro Achsenschnittpunkt
b)	2	Funktion einzeichnen und beschriften 1 Punkt Abzug, falls nicht ins gesamte Koordinatensystem gezeichnet wurde (-8<x<14!)
c)	2	Keine Teilpunkte

Aufgabe 10 Datenanalyse 6 Punkte

Ordnen Sie die Datenreihen (A - D) den Boxplot (1 - 4) zu.

Datenreihe A	Datenreihe B	Datenreihe C	Datenreihe D
9	4	8	5
9	18	10	7
12	19	17	4
18	8	8	4
8	19	19	12
9	19	4	5
20	5	6	15
10	20	8	20
11	19	20	18
9	9	18	6

Boxplot 1 - 4



Punkte	Kriterium
6	Alle Boxplots richtig zugeordnet
3	Zwei Boxplots richtig zugeordnet
1	Ein Boxplot richtig

	Boxplot 1	Boxplot 2	Boxplot 3	Boxplot 4
Datenreihe	**B**	**A**	**D**	**C**

Aufgabe 11 Ungleichungen, Lineare Optimierung 14 Punkte

a) Lösen Sie die gegebenen Bedingungen und die Zielfunktion nach y auf. Zeichnen Sie das Planungspolygon in das Diagramm auf der folgenden Seite ein. ($D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

b) Zeichnen Sie die Zielfunktion und die Parallelverschiebung ins Maximum ebenfalls ins Diagramm ein und berechnen Sie die Koordinaten für S_{max} mathematisch.

c) Wie gross ist das Maximum gemäss Zielfunktion?

(1) $3x + y \leq 30$

(2) $20 \geq x + 2y$

(3) $x \leq - y + 13$

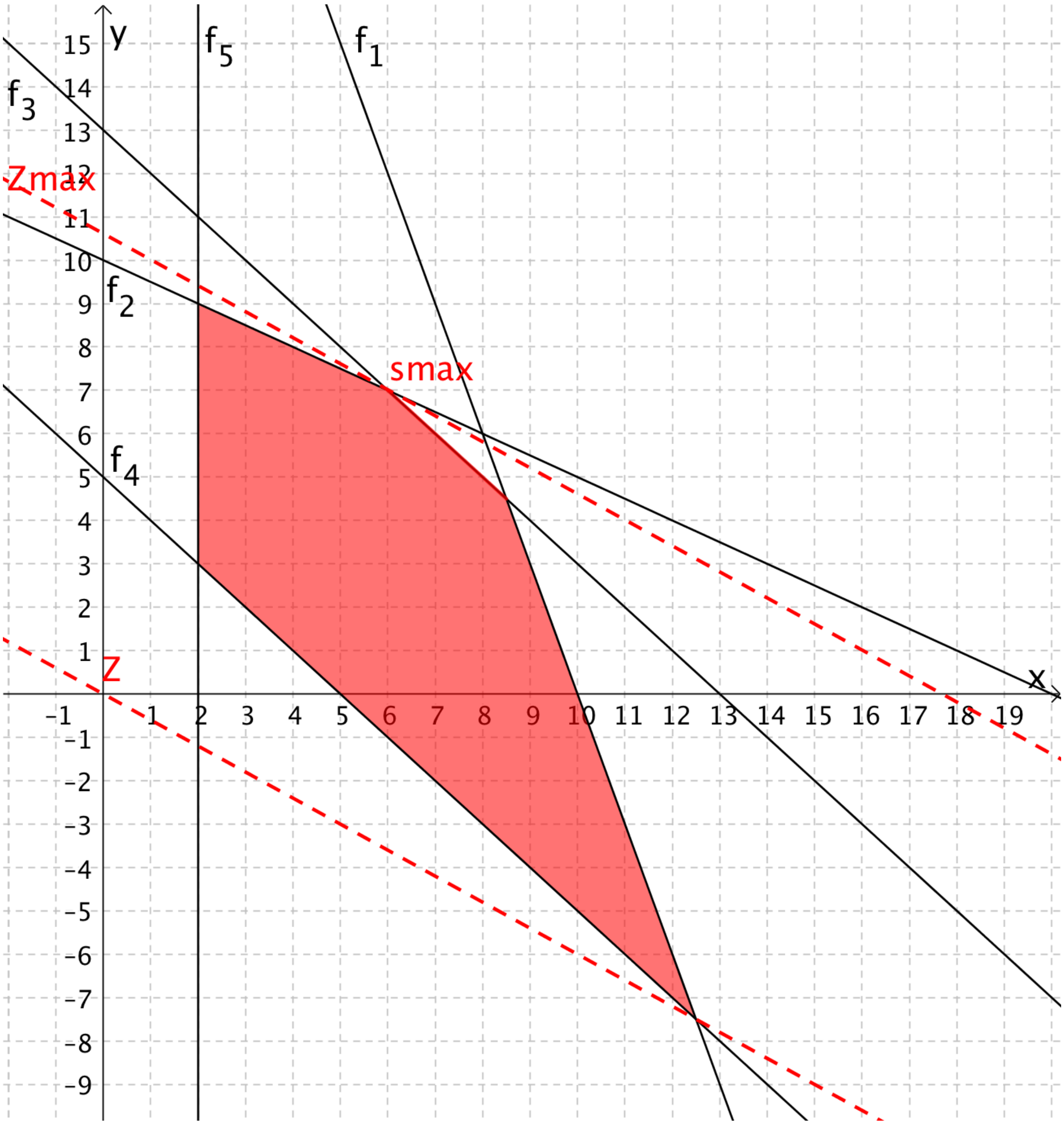
(4) $- x - y \leq - 5$

(5) $0 \geq - x + 2$

$z = 3x + 5y$

(1) $y = -3x + 30 \quad \rightarrow \leq$
(2) $y = -0.5x + 10 \quad \rightarrow \leq$
(3) $y = -x + 13 \quad \rightarrow \leq$
(4) $y = -x+5 \quad \rightarrow \geq$
(5) $x = 2 \quad \rightarrow \geq$

(z) $y = -0.6x + {}^{z}/_{5}$



Smax: Schnittpunkt der Gerade (2) und (3)

$-0.5\,x + 10 = -x + 13$
$0.5\,x = 3$
$x = 6$
$y = 7$

Smax(6|7)

$z_{max} = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 53$

Das Maximum gemäss Zielfunktion ist 53.

	Punkte	Kriterium
a)	9	5 Ungleichungen in Grenzgeraden umwandeln => 3 Punkte, pro Fehler je 1 Punkt Abzug Geraden ins Koordinatensystem einzeichnen => je 1 Punkt Planungspolygon markieren => 1 Punkt 1 Punkt Abzug, falls Polygon nicht auch im negativen Bereich markiert wurde
b)	3	Zielfunktion nach y auflösen => 1 Punkt Zielfunktion einzeichnen => 1 Punkt Zielfunktion verschieben, so dass S_{max} entsteht => 1 Punkt 0.5 Punkte Abzug, falls Smax nicht beschriftet wurde
c)	2	S_{max} => 1 Punkt; z_{max} => 1 Punkt

Aufgabe 12 — Lineare Optimierung — 6 Punkte

Zur Herstellung zweier verschiedener Mixer werden zwei Produktionsautomaten P_1 und P_2 eingesetzt. Die für die Herstellung jeweils eines Mixers benötigte Zeit eines jeden Automaten ist in der Tabelle angegeben.

	P_1	P_2
Standmixer	1.5 Minuten	4.5 Minuten
Handmixer	2.5 Minuten	4 Minuten

Für die Herstellung der Mixer steht Produktionsautomat P_1 7.5 Stunden und Produktionsautomat P_1 während 6 Stunden pro Tag zur Verfügung. Von den Handmixern sollen mindestens doppelt so viele wie von den Standmixern hergestellt.

Wie viele Mixer von jeder Sorte wird man herstellen, damit die notwendige Stückzahl erreicht wird und sich ein maximaler Gewinn ergibt? Der Gewinn eines Handmixers ist doppelt so gross wie der Gewinn eines Standmixers.

a) Bestimmen sie die Definitionen
b) Stellen Sie die Produktionsbedingungen (Ungleichungen) und die Zielfunktion auf.

Merke: Die Produktionsbedingungen müssen nicht nach y aufgelöst werden und es ist auch kein Planungspolygon zu zeichnen.

Definitionen:
x: Anzahl produzierte Standmixer pro Tag
y: Anzahl produzierte Handmixer pro Tag
D = ¥ $_0$x¥ $_0$

Bedingungen:

(1) $1.5x + 2.5y \leq 450$

(2) $4.5x + 4y \leq 360$

(3) $y \geq 2x$

$z = x + 2y$

Punkte	Kriterium
1	Definitionen für x und y
1	Definitionsmenge; 0 Punkte bei $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; 0.5 Punkte bei ¥ x ¥
3	3 Bedingungen
1	Zielfunktion

Aufgabe 13 Zinseszins- und Rentenrechnung 6 Punkte

Raffael Klug hat mit 40 Jahren einen Betrag geerbt und diesen gleich bei konstantem Zinssatz von 1.5% angelegt. Bei seiner Pension mit 65 Jahren hat er auf seinem Erb-Konto CHF 277'484.–.

Jetzt will er sich während 15 Jahren jeweils am Jahresende eine Rente auszahlen lassen.

a) Welchen Betrag erbte Raffael Klug im Alter von 40 Jahren? (Runden Sie auf ganze Franken.)

b) Wie hoch ist die Rente von Raffael Klug, wenn er sie 15-mal beziehen will? (Runden Sie auf zwei Dezimalstellen.)

c) Wie oft kann die Rente bezogen werden, wenn Ende Jahr jeweils CHF 12'000.– abgebucht werden? (Runden Sie auf ganze Jahre.),

a) K_{65}=277'484.00

Erbe Raffael Klug: $K_{40} = \frac{277'484}{1.015^{25}}$ =191'243.60

Raffael Klug erbte mit 40 CHF 191'244.-.

b) Rente von Raffael Klug: $r = 277'484 \cdot \frac{1.015^{15}(1.015-1)}{1.015^{15}-1} = 20'795.86$

Raffael Klug kann sich jährlich CHF 20‘795.86 auszahlen lassen.

c) Anzahl Renten Raffael Klug: $n = \frac{\lg(\frac{277484 \cdot 0.015}{12000}+1)}{\lg 1.015} = 19.99$

Wenn jeweils CHF 12‘000 Ende Jahr bezogen werden, so kann dies während 19 Jahren gemacht werden. (…während 20 Jahren => ebenfalls richtig!)

	Punkte	Kriterium
a)	2	Abzug für falsche Rundung => 0.5 Punkte
b)	2	Abzug für falsche Rundung => 0.5 Punkte
c)	2	Abzug für falsche Rundung => 0.5 Punkte

Aufgabe 14 Zinseszinsrechnung 7 Punkte

Startups haben es im Allgemeinen schwer, wenn sie Kapital zur Gründung einer neuen Firma beschaffen wollen. Britta Keller hat deshalb von einem Bekannten ihrer Familie einen hohen Geldbetrag zur Geschäftsgründung geliehen.
Nach 5 Jahren baut sie ihre erfolgreiche Firma weiter aus und leiht sich deswegen nochmals denselben Betrag von ihrem Geldgeber. 3 Jahre später ist ihre Schuld auf CHF 256'326.67 angewachsen. Wie hoch waren die ausgeliehenen Beträge, wenn eine Schuldverzinsung von 4.5% vereinbart wurde? Definieren Sie eine Variable und berechnen Sie die Beträge mithilfe einer Gleichung.

x = 1. Kredit in CHF

$$(x \cdot 1.045^5 + x) \cdot 1.045^3 = 256'326.67$$

$$x \cdot 1.045^5 + x = \frac{256'326.67}{1.045^3}$$

$$x = \frac{256'326.67}{1.045^3 \cdot (1.045^5 + 1)}$$

$$x = 99'999.9985...$$

Britta Keller hat sich zweimal den Betrag von CHF 100'000.– von ihrem Bekannten geliehen.

Punkte	Kriterium
1	Definition von Variable x
1	Formulieren der Gleichung
4	Berechnen der Gleichung => 1 Fehler: 2 Punkte => 2 Fehler 1 Punkt
1	Antwortsatz, 0.5 Punkte Abzug falls Masseinheit fehlt; 0.5 Punkte Abzug, falls falsch gerundet.