Kanton Glarus
Departement Bildung und Kultur

**Berufsfachschulen in den Kantonen St. Gallen, Appenzell AI und AR und Glarus**
Berufsmaturität

# Berufsmaturitätsprüfung Mathematik 2017

## Kaufmännische Berufe M-Profil

## Prüfungsbedingungen

- Erlaubte Hilfsmittel: netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner (keine CAS-Rechner) sowie die Formelsammlung des Lehrmittels „Mathematik in der Wirtschaftsschule", whv-Verlag, keine Mobiles.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und dargestellt sein. Gefordert ist auch eine klare Beschriftung aller Grafiken.
- Die Resultate müssen eindeutig markiert und dargestellt werden. Textaufgaben verlangen einen Lösungssatz.
- Doppellösungen und unbelegte Resultate werden nicht bewertet.
- Ungültige Lösungen und Lösungsansätze müssen durchgestrichen werden.
- Alle Aufgaben sind auf den dafür vorgesehenen Lösungsbereichen innerhalb dieses Dossiers zu lösen. Allfällig verwendete Zusatzblätter werden nicht bewertet.
- Platz für zusätzliche Berechnungen finden Sie ab Seite 24.

**Prüfungsdatum: Donnerstag, 8. Juni 2017, 08.00-10.00 Uhr (120 Minuten)**

# LÖSUNGEN

| Aufgabe | Maximale Punktzahl | Erreichte Punktzahl |
|---|---|---|
| 1 | 7 | |
| 2 | 4 | |
| 3 | 4 | |
| 4 | 9 | |
| 5 | 6 | |
| 6 | 6 | |
| 7 | 7 | |
| 8 | 12 | |
| 9 | 4 | |
| 10 | 11 | |
| 11 | 4 | |
| 12 | 7 | |
| 13 | 12 | |
| 14 | 7 | |
| **Total** | **100** | |
| | **NOTE** | |

**Sperrfrist:**
Diese Prüfungsaufgaben dürfen nicht vor dem **1. September 2018** zu Übungszwecken verwendet werden.

Experte 1: ................................

Experte 2: ................................

## Aufgabe 1 Grundlagen 7 Punkte

a) Zu welchen Zahlenmengen gehören folgende Zahlen? Geben Sie nur die kleinste mögliche Zahlenmenge an. Zur Auswahl stehen $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$.

| Nr. | Zahl | Zahlen-menge | Nr. | Zahl | Zahlen-menge |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 17 | $\mathbb{N}$ | d) | $4 + \sqrt{5}$ | $\mathbb{R}$ |
| b) | - 5 | $\mathbb{Z}$ | e) | 0 | $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}_0$ |
| c) | $-\frac{2}{3}$ | $\mathbb{Q}$ | f) | $\sqrt{4}$ | $\mathbb{N}$ |

b) Zerlegen Sie die Summen und Differenzen in so viele Faktoren wie möglich.

$32r^2 - 48rs + 18s^2$ => $\underline{2(4r - 3s)^2}$

$625a^4 - 81b^4$ => $\underline{(25a^2 + 9b^2)(5b + 3b)(5a - 3b)}$

| Punkte | | Kriterium |
|---|---|---|
| a) | 3 | Pro Fehler 1 Punkt Abzug |
| b) | 4 | Pro Teilaufgabe 2 Punkte; pro Fehler 1 Punkt Abzug |

## Aufgabe 2 Grundlagen 4 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Produkte resp. Quotienten soweit wie möglich.

a) $\frac{8}{(4a-4b)^3} \cdot (2b-2a)^3$ ⇨ $\underline{\underline{-1}}$

b) $\frac{18a^2b^3}{4ab} : \frac{27a^2b}{2ab}$ ⇨ $\frac{b^2}{3}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 4 | Pro Teilaufgabe 2 Punkte, pro Fehler -1P |

| Aufgabe 3 | Lineare Gleichungen | 4 Punkte |
|---|---|---|

Bestimmen Sie für die Variable x die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

$$m-\frac{n}{x}=m+n$$

Lösung:

D= $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

$m-\frac{n}{x}=m+n$

-n=nx$|:n$

$x=-1$

L=$\underline{\underline{\{-1\}\wedge n\neq 0}}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 1 | Definitionsmenge |
| 2 | Berechnung von x |
| 1 | Lösungsmenge, inklusive Ausschluss von $n\neq 0$ |

| Aufgabe 4 | Lineare Gleichungssysteme | 9 Punkte |
|---|---|---|

Bestimmen Sie für die Variablen x und y die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in der Grundmenge $\mathbb{Q}x\mathbb{Q}$.

(1) $$\frac{10}{x}+\frac{3}{1.5y-1.5}=30$$

(2) $$\frac{24}{2x}=9+\frac{3}{y-1}$$

Lösung:

$D_x=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\quad D_y=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$

(1) $$\frac{10}{x}+\frac{3}{1.5y-1.5}=30$$

(2) $$\frac{12}{x}-\frac{3}{y-1}=9$$

(1)' $\frac{10}{x} + \frac{3}{1.5y - 1.5} = 30$

(2)' $\frac{12}{1.5x} - \frac{3}{1.5y - 1.5} = 6$

Addition

$\frac{10}{x} + \frac{12}{1.5x} = 36$

15+12=54x

0.5=x

y=1.2

L=$\underline{\underline{\{(0.5|1.2)\}}}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 2 | Definitionsmengen für x und y |
| 3 | Berechnung 1. Variable; pro Fehler – 2 Punkte |
| 2 | Berechnung 2. Variable |
| 2 | Lösungsmenge korrekt mit geschweifter und runder Klammer dargestellt, -1 Punkt für fehlende Klammer |

| Aufgabe 5 | Quadratische Gleichungen | 6 Punkte |
|---|---|---|

Bestimmen Sie für die Variable x die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\frac{10}{x-4} - \frac{2x-15}{2-2x} = 1.5$$

Lösung:

D= $\mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$

$\frac{10}{x-4} - \frac{2x-15}{2-2x} = 1.5 \,|\cdot\, (x-4)(2-2x)$

$20 - 20x - 2x^2 + 23x - 60 = -3x^2 + 15x - 12$

$x^2 - 12x - 28 = 0$

$(x-14)(x+2) = 0$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 14$

L=$\underline{\underline{\{-2; 14\}}}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 1 | Definitionsmenge |
| 4 | Berechnung der beiden Lösungen; pro Fehler -2 Punkte |
| 1 | Lösungsmenge |

| Aufgabe 6 | Textaufgaben | 6 Punkte |
|---|---|---|

In einem halben Jahr müssen Sie für ein Darlehen CHF 210.- Zinsen bezahlen. Wäre das Darlehen CHF 1'600.- kleiner und der Zinssatz 0.4% tiefer, so wäre der Zins in 9 Monaten CHF 6.- kleiner.

Wie gross ist das ursprüngliche Darlehen und wie hoch ist der ursprüngliche Zinssatz in Prozenten?

Notieren Sie die Definition(en), stellen Sie die Gleichung(en) auf und notieren Sie die Definitionsmenge(n). **Die Gleichung(en) ist/sind nicht zu vereinfachen und nicht aufzulösen!**

Lösung:

x: Höhe des ursprünglichen Darlehens in CHF
y: ursprünglicher Zinssatz in Prozent

(1) $\frac{x \cdot y \cdot 6}{100 \cdot 12} = 210$

(2) $\frac{(x - 1'600) \cdot (y - 0.4) \cdot 9}{100 \cdot 12} = 210 - 6 = 204$

$D_x = \mathbb{Q}$  $D_y = \mathbb{Q}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 1 | x und y definieren, Masseinheiten **müssen** vorhanden sein! |
| 4 | 2 Punkte pro Gleichung |
| 1 | Definitionsmengen |

| Aufgabe 7 | Textaufgaben | 7 Punkte |
|---|---|---|

Die vier Kollegen Andy, Björn, Chris und Donat teilen sich eine 5-Zimmer-Wohnung in der Stadt St. Gallen. Da nicht alle Zimmer gleich gross sind, verteilen die Vier die Mietkosten von total CHF 1'820.- nach einem Verteilschlüssel.

Andy bezahlt CHF 70.- mehr als Donat. Björn zahlt 1/5 mehr als Andy und Donat 25% mehr als Chris.

Wie viele CHF muss jeder der vier übernehmen? Beträge sind korrekt auf 5 Rappen zu runden. Bestimmen Sie die Definitionen, die Definitionsmenge sowie die Mietkostenanteile der vier Kollegen.

Lösung:

x: Anteil von Donat in CHF

| Name | Anteil |
|---|---|
| Andy | x + 70 |
| Björn | $\frac{(x+70)\cdot 6}{5} = 1.2x + 84$ |
| Chris | 0.8x |
| Donat | x |

x + 70 + 1.2x + 84 + 0.8x + x = 1’820 D= $\mathbb{Q}^+$

4.5x = 1’820

x = 455

Andy bezahlt CHF 525.-, Björn CHF 630.-, Chris CHF 364.- und Donat CHF 455.-.

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 1 | x definieren, Masseinheit **muss** vorhanden sein! |
| 1 | Definitionsmenge |
| 3 | Anteile der drei weiteren Bewohner mithilfe von x ausdrücken |
| 1 | x berechnen |
| 1 | Antwortsatz mit Masseinheit |

| Aufgabe 8 | Potenzen, Wurzeln, Logarithmen | 12 Punkte |
|---|---|---|

Bestimmen Sie durch Ankreuzen die richtigen Lösungen. Es ist jeweils eine Antwort richtig. Falls Resultate nicht ganzzahlig sind, sind diese korrekt auf fünf Kommastellen zu runden.

a)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $a^{-6}$ | $a^4$ | ☐ |
| | $\frac{1}{a^6}$ | ☒ |
| | $\frac{1}{-a^6}$ | ☐ |
| | $-a^6$ | ☐ |

b)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $b^4 + b^4 \cdot b^3 + b^4$ | $3b^7$ | ☐ |
| | $b^{15}$ | ☐ |
| | $3b^4 + b^3$ | ☐ |
| | $2b^4 + b^7$ | ☒ |

c)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $\left(\frac{a^{-3}b^2}{a^2b^{-3}}\right)^{-2}$ | $\left(\frac{b}{a}\right)^{-10}$ | ☒ |
| | $\frac{a^{-2}}{b^{-2}}$ | ☐ |
| | $\frac{b^{10}}{a^{10}}$ | ☐ |
| | $\frac{a^5}{b^5}$ | ☐ |

d)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $\log_{2x}1024 = 5$ | $L = \{3.48220\}$ | ☐ |
| | $L = \{2\}$ | ☒ |
| | $L = \{2.52383\}$ | ☐ |
| | $L = \{32\}$ | ☐ |

e)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $\sqrt[\frac{1}{3}]{\frac{b^{27}}{8}}$ | $\frac{b^9}{2}$ | ☐ |
| | $\frac{b^3}{2}$ | ☐ |
| | $\frac{b^{81}}{512}$ | ☒ |
| | $\frac{b^{19683}}{512}$ | ☐ |

f)

| | Lösung | |
|---|---|---|
| $6^{(2x-5)} = 279'936$ | $\mathrm{L} = \{6\}$ | ☒ |
| | $\mathrm{L} = \{1\}$ | ☐ |
| | $\mathrm{L} = \{23'330.5\}$ | ☐ |
| | $\mathrm{L} = \{2{,}57143\}$ | ☐ |

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 12 | Pro Teilaufgabe 2 Punkte |

## Aufgabe 9 Lineare Funktionen 4 Punkte

Die Gerade $h_5$ verläuft durch die Punkte A (1.8|3.8) und B (-3.2|-2.2). Berechnen Sie die Normalform der Geraden $h_5$ und die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Geraden mit der x-Achse. Runden Sie auf 2 Dezimalstellen.

Lösung:

$$\mathrm{m} = \frac{-2.2-3.8}{-3.2-1.8} = \frac{6}{5}$$

$3.8 = 1{,}2 \text{ x } 1.8 + q \quad => \quad q = 1.64$ $\qquad$ $\underline{h_5: y = 1.2x + 1.64}$

$0 = 1.2x + 1.64 \quad => \quad x = -1.37$ $\qquad$ $\underline{S_x(-1.37|0)}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 2 | Funktionsgleichung Gerade $h_5$: m 1 Punkt, q 1 Punkt |
| 2 | 1 Punkt je Koordinate von $S_x$ |

## Aufgabe 10 Betriebswirtschaftliche Funktionen 11 Punkte

An einem Open-Air-Festival offeriert der Veranstalter drei teilnehmenden Rockbands folgende Honorarangebote:

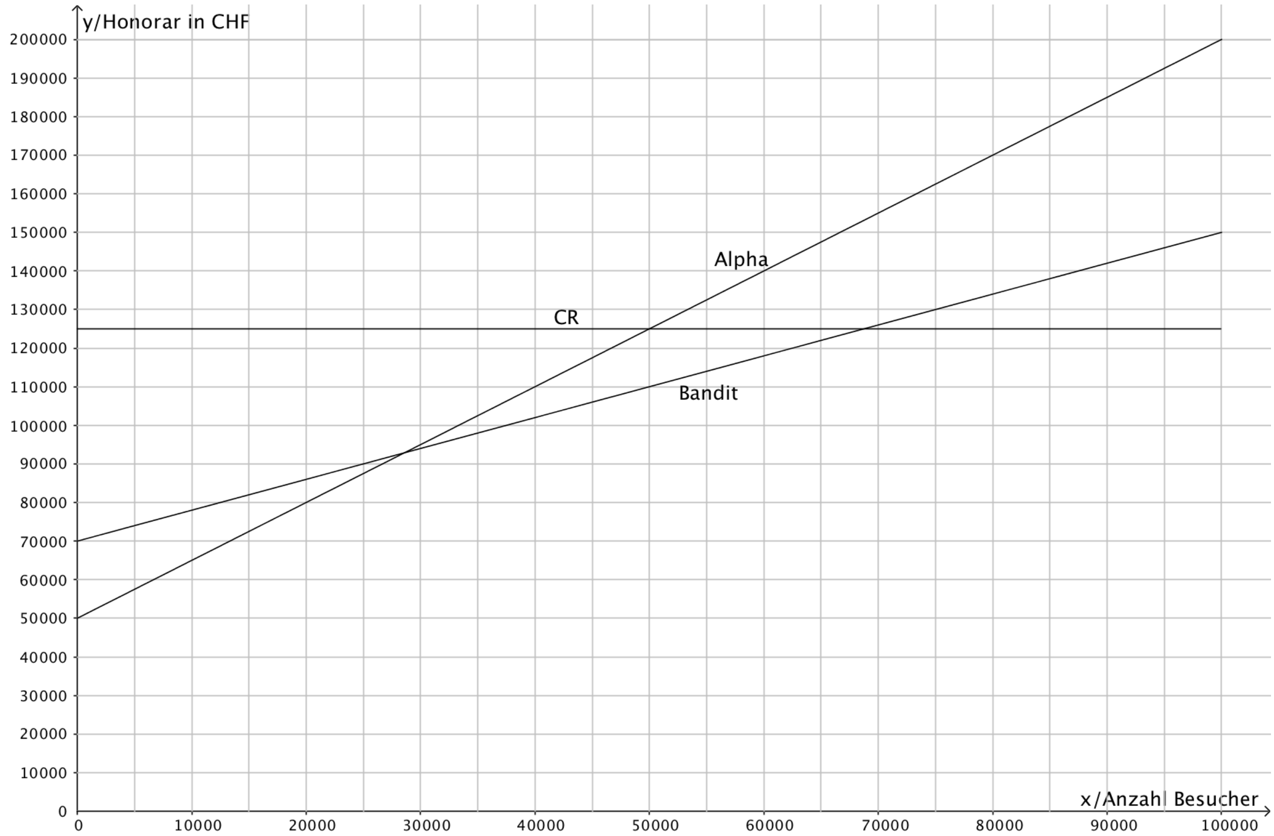
Band „Alpha-Up" erhält eine Startpauschale von CHF 50'000.- und einen Anteil von CHF 1.50 pro Festivalbesucher.
Stil-Band „Bandit-2" ist ebenso an den Einnahmen der Festivalbesucher beteiligt und erhält bei 25'000 Besuchern CHF 90'000.-. Kommen jedoch 60'000 Besucher, so beträgt ihr Honorar CHF 118'000.-.

Band „CR-9" erhält einen pauschalen Fixbetrag von CHF 125'000.-.

a) Bestimmen Sie die linearen Funktionsgleichungen für die drei Bands (x: Anzahl Konzertbesucher, y: Honorar in CHF).
b) Stellen Sie die drei Honorarfunktionen im nachfolgenden Koordinatensystem graphisch dar. ($0 < x < 100'000$)

Lösung:

a) x: Anzahl Konzertbesucher, y: Honorar in CHF:     Definitionsmengen D = $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+$
b) Funktionen:     „Alpha-Up"   y = 1.5x + 50'000
                           „Bandit-2"   y =0.8x + 70'000
                           „CR-9"   y = 125'000




c) Berechnen Sie die minimale Besucherzahl, bei der Band „Alpha-Up" und „Bandit-2" gleich grosse Honorare bekommen. Wie viel beträgt das Honorar (auf ganze CHF runden)?

1.5x+50000 = 0.8x+70000   =>   x = 28571.42 (richtig runden)

Minimale Besucherzahl: 28'572   Das Honorar beträgt CHF 92'858.-.

d) Am Open-Air-Festival kommen 82'000 Besucher. Welche Band bekommt das höchste Honorar? Berechnen Sie dieses Honorar.

| | | | |
|---|---|---|---|
| „Alpha-Up" | y = 1.5x + 50000 | => | CHF 173'000.- |
| „Bandit-2" | y =0.8x + 70000 | => | CHF 135'600.- |
| „CR-9" | y = 125000 | => | CHF 125'000.- |

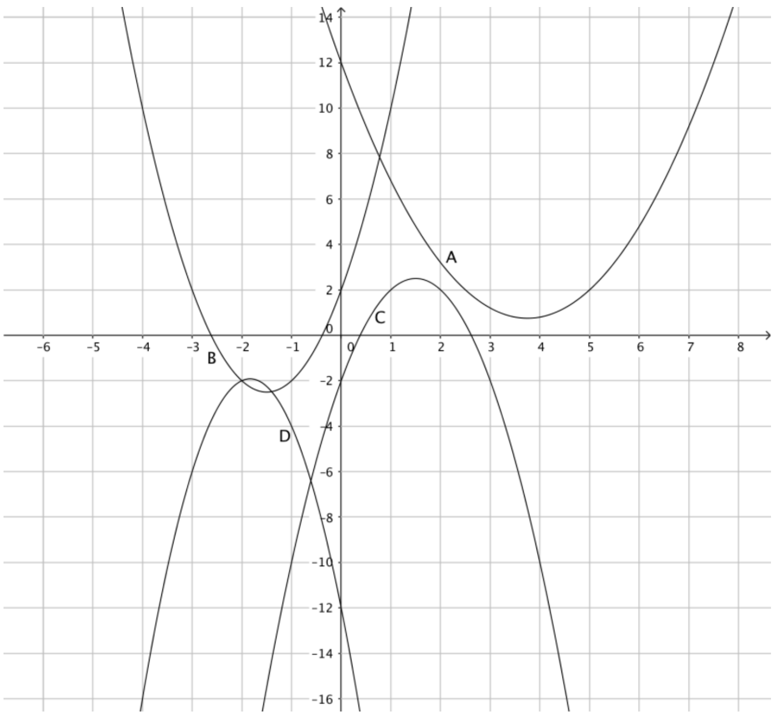
| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 4 | 1 Punkt je für Alpha-Up und CR-9; 2 Punkte für Bandit-2 |
| 3 | 1 Punkt je Graph der drei Funktionen |
| 2 | 1 Punkt Besucherzahl (richtig gerundet!); 1 Punkt Honorar |
| 2 | Antwort „Alpha-Up" (1 Punkt) mit korrektem Honorar und Masseinheit (1 Punkt) |

## Aufgabe 11 Quadratische Funktionen 4 Punkte

Ordnen Sie nachfolgende Funktionsgleichungen den abgebildeten Graphen A – D zu.

Funktionsgleichungen: Nr. 1: $y = x^2 + 6x + 2$ Nr. 2: $y = 0.8x^2 - 6x + 12$

Nr. 3: $y = -2x^2 + 6x - 2$ Nr. 4: $y = -3x^2 - 11x - 12$




Zuordnung:

| Graph | Funktionsgleichung |
|---|---|
| A | Nr. **2** |
| B | Nr. **1** |
| C | Nr. **3** |
| D | Nr. **4** |

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 4 | Pro Zuordnung 1 Punkt |

## Aufgabe 12 Lineare Optimierung 7 Punkte

Ein deutscher Landwirt pflanzt auf seinen 90 ha Ackerland Kartoffeln und Zuckerrüben. Kartoffeln erfordern einen Arbeitsaufwand von 3 Tagen je ha und einen Kapitalaufwand von 400 € je ha, Zuckerrüben benötigen 4 Tage je ha und 200 € Aufwand je ha. Wegen der Bodenqualität müssen mindestens 50 ha Zuckerrüben angebaut werden. Für die Bewirtschaftung der 90 ha stehen maximal 360 Arbeitstage und maximal 24'000 € zur Verfügung. (1 ha = 1 Hektare = 10'000m$^2$)

Pro ha Kartoffeln erzielt er einen Gewinn von 450 €, eine ha Zuckerrüben werfen 150 € ab. Wie soll der Landwirt sein Land für die beiden Produkte aufteilen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

a) Bestimmen Sie die Definitionen.

b) Geben Sie die Bedingungen (Ungleichungen) und geben Sie die Zielfunktion an.

Die Ungleichungen und die Zielfunktion müssen **nicht nach y aufgelöst werden**. Es ist **keine Graphik zu erstellen**.

Definitionen x: Anz. ha Kartoffeln
y: Anz. ha Zuckerrüben
$\mathbb{D} = \mathbb{Q}^{+} x \mathbb{Q}^{+}$

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 1 | Definitionen x und y mit Einheiten |
| 1 | Definitionsmenge |
| 4 | Ungleichungen aufstellen |
| 1 | Zielfunktion aufstellen |

1) $x + y \leq 90$

2) $3x + 4y \leq 360$

3) $400x + 200y \leq 24'000$

4) $y \geq 50$

z) $z = 450x + 150y$

| Aufgabe 13 | Lineare Optimierung | 12 Punkte |
|---|---|---|

Gegeben sind vier Ungleichungen (Bedingungen) und eine Zielfunktion.

a) Formen Sie die gegebenen Bedingungen zu Grenzgeraden um und zeichnen Sie das Planungsvieleck in das Diagramm auf der folgenden Seite ein. ($\mathbb{D} = \mathbb{Q}^{+} x \mathbb{Q}^{+}$) Schraffieren Sie das Planungspolygon. Zeichnen Sie die Zielfunktion ebenfalls ins Diagramm auf der folgenden Seite inklusive vollständiger Beschriftung ein.

b) Berechnen Sie die Koordinaten für $S_{max}$.

c) Berechnen Sie den Wert des Maximums gemäss Zielfunktion?

Lösung:

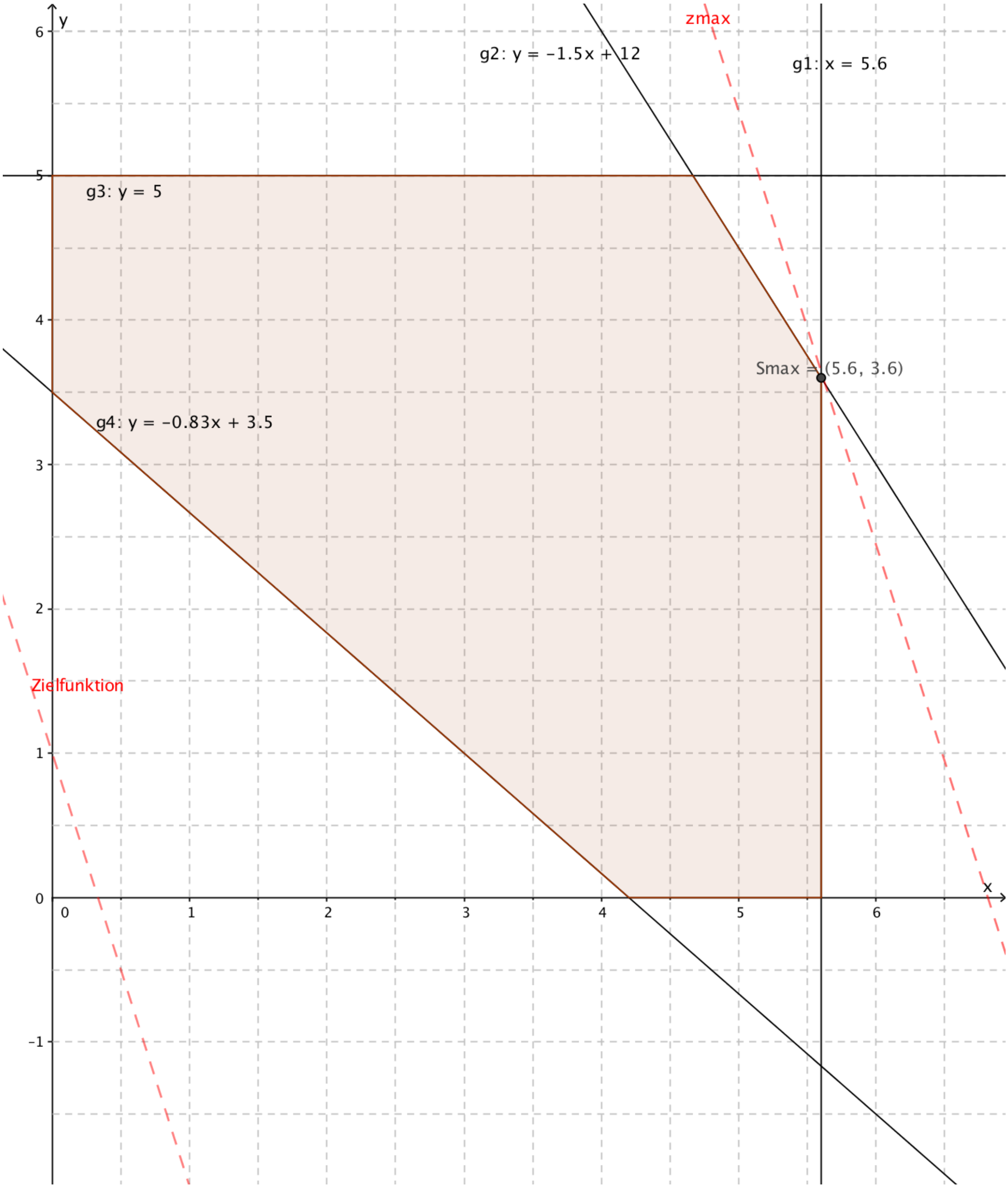
1) $5.6 - x \geq 0 \Rightarrow x = 5.6 \text{ und } \leq$

2) $30x + 20y \leq 240 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 12 \text{ und } \leq$

3) $5 \geq y \Rightarrow y = 5 \text{ und } \leq$

4) $42y \geq 147 - 35x \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x + 3.5 \text{ und } \geq$

Zielfunktion $z = 9x + 3y \Rightarrow y = -3x + \frac{z}{3} \Rightarrow m = -3$


y
x
zmax
g2: y = −1.5x + 12
g1: x = 5.6
g3: y = 5
Smax = (5.6, 3.6)
g4: y = −0.83x + 3.5
Zielfunktion

a) 1) ∩ 3)

$$y = -\frac{3}{2}x + 12 \text{ und } x = 5.6$$

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 5.6 + 12 = 3.6$$

$S_{max}(5.6|3.6)$

c) Maximaler Gewinn:
$9 \cdot 5.6 + 3 \cdot 3.6 =$
Der maximale Gewinn beträgt 61.20.

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 3 | Umformen der Geraden 1 bis 4 und z |
| 4 | Einzeichnen der Geraden ins Koordinatensystem |
| 1 | Zielfunktion einzeichnen |
| 1 | Polygon markieren |
| 2 | $S_{max}$ bestimmen |
| 1 | Maximum gemäss Zielfunktion berechnen |

## Aufgabe 14 Zinseszins 7 Punkte

Ein unbekanntes Anfangskapital wird auf einem neu eröffneten Sparkonto zu 0.3 % verzinst. Zwei Jahre nach der Kontoeröffnung senkt die Bank den Zinssatz auf 0.2 %. Ein Jahr nach dieser Senkung werden CHF 5'600.- vom Sparkonto abgehoben. Weitere zwei Jahre später wird die Hälfte des ursprünglichen Anfangskapitals auf das Konto einbezahlt. Nach insgesamt 7 Jahren beträgt der Saldo auf dem Sparkonto CHF 28'360.75. Wie hoch war das Anfangskapital?

Anfangskapital in CHF: x

$$[(x \cdot 1.003^2 \cdot 1.002 - 5'600) \cdot 1.002^2 + 0.5x] \cdot 1.002^2 = 28'360.75$$

$$1.01206x - 5'622.422 + 0.5x = 28'247.646$$

$$1.512x = 33'870.069$$

x=22'399.99

Das Anfangskapital betrug CHF 22’400.-.

| Punkte | Kriterium |
|---|---|
| 2 | Gleichung erstellen mit korrekter Klammersetzung, 1 Teilpunkt für Erstellung der Gleichung bis zum Jahr 5 |
| 4 | Gleichung auflösen, pro Fehler -2 Punkte |
| 1 | Schlusssatz mit Masseinheit |